

Prova scritta di Analisi Matematica I del 28.01.14.

Soluzioni.

Esercizio 1. Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso

$$\left(\frac{-2 - \sqrt{15} + 2i\sqrt{3} - i\sqrt{5}}{4 + i2\sqrt{5}} \right)^{106}.$$

Soluzione. Semplifichiamo la frazione z fra parentesi. Si ha

$$(4 + i2\sqrt{5})z := -(2 + \sqrt{15}) + i(2\sqrt{3} - \sqrt{5}),$$

quindi

$$\begin{aligned} (4 - i2\sqrt{5})(4 + i2\sqrt{5})z &= 36z = (4 - i2\sqrt{5})[-(2 + \sqrt{15}) + i(2\sqrt{3} - \sqrt{5})] = \\ &[-4(2 + \sqrt{15}) + 2\sqrt{5}(2\sqrt{3} - \sqrt{5})] + i[2\sqrt{5}(2 + \sqrt{15}) + 4(2\sqrt{3} - \sqrt{5})] = \\ &(-8 - 4\sqrt{15} + 4\sqrt{15} - 10) + i(4\sqrt{5} + 10\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{5}) = \\ &-18 + 18\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Perciò $z = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = e^{2\pi i/3}$; $z^3 = 1$ e finalmente $z^{106} = z^{3 \cdot 35 + 1} = (z^3)^{35}z = z$.

Commenti. Si noti che la forma cartesiana dei numeri complessi è in genere più comoda per calcolare una frazione (si trova $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$), mentre la forma esponenziale è in genere più comoda per calcolare potenze (infatti si ha $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$). Si ricordi poi che la funzione $t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ è 2π -periodica, per cui, per finire il calcolo richiesto, l'esponente andava ridotto modulo 2π . In conclusione, l'ordine ottimale delle operazioni era: calcolare la frazione in forma cartesiana, scrivere il risultato in forma esponenziale, eseguire l'elevamento a potenza e ridurre l'esponente complesso, modulo 2π .

ATTENZIONE. Le formule analitiche delle funzioni trigonometriche, assieme alle derivate, sviluppi e periodicità, si riferiscono agli **angoli radianti**, da non confondere quindi con gli **angoli sessagesimali** che possono essere utilizzati dalle calcolatrici. Non tenere conto di tale differenza di unità di misura produce gravi errori, sia di calcolo che concettuali.

Esercizio 2. Stabilire se l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t} + 1}{e^t - 1} dt$$

è convergente e in tal caso calcolarne il valore.

Soluzione. Il cambio di variabile $x := e^{-t}$, $dx = -e^{-t} dt$ riconduce l'integrale improprio ad un integrale di Riemann di una funzione razionale regolare sull'intervallo $[0, 1/e]$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t} + 1}{e^t - 1} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{e^{-2t} + 1}{e^t - 1} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{e^{-2t} + 1}{1 - e^{-t}} e^{-t} dt = \\ \lim_{T \rightarrow \infty} - \int_{e^{-1}}^{e^{-T}} \frac{x^2 + 1}{1 - x} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{e^{-T}}^{e^{-1}} \frac{x^2 + 1}{1 - x} dx = \int_0^{e^{-1}} \frac{x^2 + 1}{1 - x} dx = \\ \int_0^{e^{-1}} \frac{2 - (1 - x)(1 + x)}{1 - x} dx &= \int_0^{e^{-1}} \left(\frac{2}{1 - x} - 1 - x \right) dx = \\ \left[-2 \log(1 - x) - x - x^2/2 \right]_0^{e^{-1}} &= -2 \log(1 - e^{-1}) - e^{-1} - e^{-2}/2 = \\ 2 - 2 \log(e - 1) - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2}. \end{aligned}$$

Commenti. Calcolando un integrale definito per **cambio di variabili** conviene usare la formula per **integrali definiti**:

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx,$$

per cui il valore dell'integrale è semplicemente $F(g(b)) - F(g(a))$, se F è una primitiva nota di f . Questo comporta una particolare attenzione nella sostituzione degli **estremi di integrazione**. Generalmente questa procedura riduce la possibilità di errore rispetto all'utilizzo di "integrali indefiniti". Questi portano alla scrittura informale

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx + C,$$

la quale richiede quindi di tornare alla vecchia variabile t per trovare una primitiva della funzione di partenza. Si noti inoltre che nella versione per integrali impropri, ad es.

$$\int_a^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(g(b)) - F(g(a)),$$

si può calcolare direttamente il limite per sostituzione, ma verificando di essere nelle dovute ipotesi di convergenza dell'integrale, le quali giustifichino tale passaggio.

Esercizio 3. Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2} - \cos(2x) + x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Stabilire se l'origine sia un punto di massimo o di minimo locale, o nessuno dei due.

Soluzione. Dagli sviluppi di Taylor in zero dell'esponenziale e del coseno si ha:

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

rispettivamente

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

per $x \rightarrow 0$. Si ha perciò, essendo $\sin(1/x) \geq -1$

$$f(x) = \left(\frac{4}{3} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) + o(1)\right)x^4 \geq \left(\frac{1}{3} + o(1)\right)x^4 .$$

Poiché questa quantità è positiva in un intorno di 0 concludiamo che $x = 0$ è **un punto di minimo locale stretto** per la funzione $f(x)$.

Commenti. Si ricordi sempre che ogni sviluppo di Taylor è associato al suo centro di sviluppo. Occorre quindi fare attenzione al limite che sottintendiamo per la variabile considerata. Si ha per esempio

$$\sin(t) = t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0 ,$$

e se ne può dedurre per esempio

$$\sin(1/x) = 1/x + o(1/x) \quad \text{per } x \rightarrow \infty ,$$

ma è ovviamente falso (precisamente un grave errore) scrivere

$$\sin(t) = t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow \infty ,$$

oppure

$$\sin(1/x) = 1/x + o(1/x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 .$$

Le precedenti due formule implicherebbero in particolare che la funzione seno è illimitata, ma ciò è chiaramente falso.