Foglio di Esercizi 5
Corso di Teoria Geometrica della Misura
Anno Accademico: 2012-2013

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
magnani@dm.unipi.it

Pisa, 26 Maggio 2013

1. Sia $\mu \geq 0$ una misura su una σ-algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ e sia $f \in L^1_\mu(X, [0, +\infty])$. Provare che ogni $u : X \to [0, +\infty]$, che sia misurabile rispetto ad $\mathcal{A}$, soddisfa
$$\int_X u\, d(f\mu) = \int_X u\, f\, d\mu\,.$$

2. Sia $f : X \to Y$ invertibile, $\mu \geq 0$ una misura esterna su X e sia $u : Y \to [0, +\infty]$. Provare le seguenti affermazioni.
   (a) L'insieme $A \subset Y$ è $f_\sharp\mu$-misurabile se e solo se $f^{-1}(A)$ è μ-misurabile.
   (b) u è $f_\sharp\mu$-misurabile se e solo se $u \circ f$ è μ-misurabile.
   (c) Se una delle ipotesi del punto precedente vale, allora abbiamo la formula
$$\int_Y u\, d(f_\sharp\mu) = \int_X u \circ f\, d\mu\,.$$

3. Siano X e Y spazi topologici, sia $f : X \to Y$ e sia μ una misura esterna su X. Se f è continua e invertibile, X è localmente compatto, di Hausdorff e soddisfa il secondo assioma di numerabilità, provare le seguenti affermazioni.
   (a) Se μ è boreliana, allora anche $f_\sharp\mu$ lo è.
   (b) Se μ è Borel regolare, allora anche $f_\sharp\mu$ lo è.