Algebra – A. A. 2003-2004
Terzo scritto

13 luglio 2004

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo la seguente funzione f_k, dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccc} f_k: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+kz, x-y, x+k^2-k) \end{array}$$

1. Dimostrare che f_k è lineare se e solo se $k=0$ o $k=1$.

   Se f_k è lineare, allora $f_k(0,0,0) = (0,0,0)$, quindi $k^2-k=0$, quindi $k=0$ oppure $k=1$. Per questi due valori di k si verifica che effettivamente f_0 ed f_1 sono lineari, con matrici associate rispettivamente

   $$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Dire se f_0 e f_1 sono suriettive.

   La matrice A_0 ha rango 2 e quindi f_0 non è suriettiva. La matrice A_1 ha rango 3 e quindi f_1 è suriettiva.

3. Scrivere la matrice associata all'applicazione lineare

   $$f_1 \circ f_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

   La matrice associata è

   $$A_1 \cdot A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & \sqrt{3} & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sommando la penultima riga all'ultima otteniamo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & \sqrt{3} & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

togliendo l'ultima colonna alla penultima otteniamo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & \sqrt{3} & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & \sqrt{3} & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sommando la seconda riga alla prima e sottraendo la seconda alla quarta otteniamo

$$2 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & \sqrt{3} & 4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & \sqrt{3} & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 = 0$$

perché ha due colonne uguali.

Esercizio 3 (9 punti). Considerare al variare del parametro reale t la seguente matrice:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & t+1 \end{bmatrix}$$

1. dire se esistono valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui A_t non è invertibile.

   Abbiamo $\det A_t = -t - 1 + 1 = -t$, quindi A_t è invertibile per ogni $t \neq 0$.

2. dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t è diagonalizzabile.

   Il polinomio caratteristico di A_t è

   $$(1-\lambda)\big((-1-\lambda)(t+1-\lambda)+1\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - t\lambda - t)$$

   Questo ha tre radici reali quando $t^2 + 4t \geqslant 0$, cioè per $t \leqslant -4$ e per $t \geqslant 0$. In questo caso le tre radici sono

   $$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{t + \sqrt{t^2+4t}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{t - \sqrt{t^2+4t}}{2}.$$

   Abbiamo $\lambda_2 = \lambda_3$ se e solo se $t^2 + 4t = 0$, cioè per $t = 0$ e $t = -4$. Abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2$ oppure $\lambda_1 = \lambda_3$ se e solo se $2 = t \pm \sqrt{t^2+4t}$, cioè se $(2-t)^2 = t^2 + 4t$, quindi per $t = 1/2$.

   Restano da valutare i casi $t = 0, -4$ e $1/2$. Per $t = 0$ gli autovalori sono $1, 0$ e 0, e

   $$m_{\text{geo}}(0) = \dim \ \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 2 = m_{\text{alg}}(0)$$

   quindi non è diagonalizzabile. Per $t = -4$ gli autovalori sono $1, -2$ e -2, e

   $$m_{\text{geo}}(-2) = \dim \ \text{Ker} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 2 = m_{\text{alg}}(-2)$$

   quindi non è diagonalizzabile. Per $t = 1/2$ gli autovalori sono $1, 1$ e $-1/2$, e

   $$m_{\text{geo}}(1) = \dim \ \text{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} = 2 = m_{\text{alg}}(1)$$

quindi è diagonalizzabile.

Conclusione: la matrice è diagonalizzabile per ogni $t < -4$ e per ogni $t > 0$, ma con $t \neq 1/2$.

Esercizio 4 (9 punti).
Siano

$$V = \text{ Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$W_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| 2x + y + t = 0, x + z + at = 0 \right\}$$

due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, con W_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$.

1. Trovare la dimensione di $V \cap W_a$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

   Risolvendo il sistema si trova che

$$W_a = \text{ Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 2a-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   quindi

$$V + W_a = \text{ Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 2a-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Valutiamo ora il determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 2 & 2a-1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -1 & -a \\ 2 & -2a+2 & 2 & 2a-1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ 2 & -2a+2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ 0 & -4a & 4 \\ 0 & -3a-2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$4 \cdot \det \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -3a-2 & 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-4a + 3a + 2) = -16 \cdot (2 - a)$$

Quindi $\dim V + W_a = 4$ per ogni $a \neq 2$. Per $a = 2$ si verifica che il rango della matrice è 3, quindi $\dim V + W_a = 3$ in questo caso. Usando Grassmann, deduciamo che

$$\dim V \cap W_a = \dim V + \dim W_a - \dim(V + W_a) = 2 + 2 - \dim(V + W_a)$$

è zero per ogni $a \neq 1$, ed uno per $a = 1$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ abbiamo $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_a$.

   Poiché $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, abbiamo $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_a$ per ogni $a \neq 1$.