ESERCIZI DI TOPOLOGIA

BRUNO MARTELLI

Alcuni esercizi sono contrassegnati dai simboli ($\star$), ($\star\star$), ($\star\star\star$), a indicare che sono esercizi più difficili (il numero di asterischi è proporzionale alla difficoltà). Altri esercizi sono accompagnati da una traccia di svolgimento. Anche alcune osservazioni sono contrassegnate con ($\star$), ad indicare che mostrano aspetti più difficili della teoria che possono essere saltati ad una prima lettura.

1. Connessi e connessi per archi

1.1. **Componenti connesse.** Dato uno spazio topologico X e un punto $p \in X$, definiamo la *componente connessa* $c(p)$ *di* X *contenente* p come il più grande sottoinsieme connesso di X fra quelli che contengono p. A priori, questa definizione potrebbe essere ambigua: chi ci dice che esista un connesso più grande di tutti fra quelli contenenti p ?

Ad esempio, non possiamo definire $c'(p)$ come il sottoinsieme *compatto* più grande fra quelli contenenti p: se $X = \mathbb{R}$ un tale insieme $c'(p)$ non esiste (ogni compatto è contenuto in un compatto più grande ottenuto aggiungendo un punto). La buona definizione della componente connessa segue dalla seguente:

Proposizione 1.1. *L'unione di tutti i sottoinsiemi di X connessi contenenti p è un insieme connesso.*

Dim. In generale, se ho dei connessi $\{A_i\}_{i\in I}$, dove I è un insieme di indici, tali che $p \in A_i$ per ogni i, allora $A = \cup_{i\in I} A_i$ è connesso. Supponiamo infatti che $A = A' \sqcup A''$ sia unione disgiunta di due aperti; possiamo supporre che $p \in A'$ e $p \notin A''$. Allora anche $A_i \cap A'$ e $A_i \cap A''$ sono due aperti disgiunti in A_i (ovviamente, considerato con la topologia indotta!), la cui unione è A_i, per ogni $i \in I$. Ma poiché A_i è connesso e contiene p, abbiamo necessariamente $A'' \cap A_i = \emptyset$ per ogni i, da cui segue che $A'' = \emptyset$. Quindi A è connesso. $\square$

Corollario 1.2. *L'unione di tutti i connessi contenenti p è il più grande connesso contenente p, che chiamo $c(p)$.*

Dim. Sia A l'unione di tutti i connessi contenenti p. Per la proposizione sopra, A è connesso. Ogni altro connesso contenente p è un sottoinsieme di A per definizione di A. $\square$

Osservazione 1.3. Per ogni $q \in c(p)$ abbiamo $c(q) = c(p)$.

Dim. Se $q \in c(p)$, allora $c(p)$ è un connesso contenente q. quindi $c(p) \subset c(q)$. Ma non ci sono connessi contenenti $c(p)$ più grossi di $c(p)$, quindi $c(p) = c(q)$. □

Definiamo quindi la relazione di equivalenza $\sim$ su X ponendo $p \sim q$ se e solo se $q \in c(p)$, cioè se $c(p) = c(q)$. La relazione $\sim$ induce quindi una partizione di X in insiemi (dati dalle classi di equivalenza), che chiamiamo le *componenti connesse di* X, e che denotiamo con $C(X)$.

Proposizione 1.4. *Ogni componente connessa di* X *è chiusa.*

Dim. Sia $c(p)$ una componente connessa e $q \in X$ un punto non contenuto in $c(p)$. Dimostriamo che esiste un aperto $U(q)$ contenente q e disgiunto da p: questo implica che $X \setminus c(p)$ è aperto, cioè che $c(p)$ è chiuso.

Il sottospazio $c(p) \cup \{q\}$ non è connesso, perché nessun connesso contiene strettamente $c(p)$. Quindi $c(p) \cup \{q\}$ è l'unione di due aperti disgiunti, che devono essere $c(p)$ e $\{q\}$. Che $\{q\}$ sia aperto dentro $c(p) \cup \{q\}$ vuol dire che c'è un aperto $U(q)$ di X contenente q e disgiunto da $c(p)$. □

Proposizione 1.5. *Il passaggio da* X *a* $C(X)$ *definisce un* funtore covariante *dalla categoria degli spazi topologici a quella degli insiemi.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che ogni $f : X \to Y$ continua induce una $f_* : C(X) \to C(Y)$ tale che:

(1) se f è l'identità su X, allora f_* è l'identità su $C(X)$,
(2) se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue allora $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

La f_* è definita nel modo seguente: poiché f è continua, manda connessi in connessi. Quindi se $A \in C(X)$ è una componente connessa di X allora $f(A)$ è connessa, ed è quindi contenuta in una componente connessa di Y, che denoto con $f_*(A)$. Ottengo quindi una funzione $f_* : C(X) \to C(Y)$. È ora facile dimostrare i due punti richiesti. □

Proposizione 1.6. *Se* f *è suriettiva anche* f_* *lo è.*

Dim. Sia data $f : X \to Y$ e una componente connessa A di Y. Preso un punto qualsiasi $q \in A$, poiché f è suriettiva esiste una controimmagine $p \in f^{-1}(q)$. Quindi $f(c(p))$ è un connesso che contiene q, ed è quindi contenuto in A: allora $f_*(c(p)) = A$ e f_* è suriettiva. □

Corollario 1.7. *Sia* $f : X \to Y$ *una funzione continua fra spazi topologici. Se* f *è suriettiva, allora* Y *non può avere più componenti connesse di* X.

Dim. Se f è suriettiva anche $f_* : C(X) \to C(Y)$ lo è e quindi $C(Y)$ non può avere cardinalità superiore a $C(X)$. $\square$

Esercizio 1.8. Mostrare con esempi semplici che f iniettiva non implica in generale che f_* sia iniettiva.

1.2. **Componenti connesse per archi.** Ricordiamo che uno spazio topologico X è *connesso per archi* se per ogni $p, q \in X$ esiste una funzione continua $f : [0,1] \in X$ tale che $f(0) = p$ e $f(1) = q$. Una tale funzione è detta un *arco* o un *cammino* che collega p e q. Dimostriamo ora che si possono definire in modo analogo le *componenti connesse per archi* $C^{\text{arc}}(X)$ *di* X:

Proposizione 1.9. *L'unione* $c^{\text{arc}}(p)$ *di tutti i sottoinsiemi di* X *connessi per archi contenenti* p *è un insieme connesso per archi. L'insieme* $c^{\text{arc}}(p)$ *è inoltre l'insieme dei punti* q *per cui esiste un arco in* X *che collega* p *e* q.

Dim. In generale, se ho dei connessi per archi $\{A_i\}_{i\in I}$, dove I è un insieme di indici, tali che $p \in A_i$ per ogni i, allora $A = \cup_{i\in I} A_i$ è connesso per archi. Infatti presi $q, q' \in A$, abbiamo $q \in A_i$ e $q' \in A_{i'}$ per qualche $i, i' \in I$. Poiché A_i ed $A_{i'}$ sono connessi per archi che contengono p, esistono dei cammini $f : [0,1] \to A_i$ e $f' : [0,1] \to A_{i'}$ tali che $f(0) = f'(0) = p$ e $f(1) = q, f'(1) = q'$. A questo punto il cammino $F : [0,1] \to A$ definito come

$$F(t) = \begin{cases} f(1-2t) & \text{se } t \leqslant 1/2 \\ f'(2t-1) & \text{se } t \geqslant 1/2 \end{cases}$$

collega q a q', e quindi A è connesso per archi. La seconda asserzione segue facilmente. $\square$

La seconda asserzione della Proposizione 1.9 mostra che possiamo definire le componenti connesse per archi direttamente con una relazione di equivalenza $\sim^{\text{arc}}$: poniamo $p \sim^{\text{arc}} q$ se e solo se esiste un cammino che collega p e q. Gli insiemi della partizione indotta sono le *componenti connesse per archi.*

Osservazione 1.10. Una $f : X \to Y$ continua manda connessi per archi in connessi per archi. Come sopra si vede quindi che associando $C^{\text{arc}}(X)$ ad X si ottiene un funtore covariante. Anche qui, se f è suriettiva anche $f_* : C^{\text{arc}}(X) \to C^{\text{arc}}(Y)$ lo è.

1.3. **Differenze fra le due definizioni di connessione.**

Proposizione 1.11. *Ogni spazio topologico connesso per archi è connesso. Il sottospazio* $X \subset \mathbb{R}^2$ *definito da*

$$X = \big\{(0,y)\big||y| \leqslant 1\big\} \cup \big\{(x, \sin 1/x)\big|0 < x \leqslant 1\big\}$$

è connesso ma non connesso per archi.

Dim. Dimostriamo che uno spazio Y connesso per archi è connesso. Fissiamo un punto $p \in Y$. Se Y è connesso per archi, ogni altro punto q è collegabile a p mediante un cammino $\gamma_q : [0,1] \to X$. L'immagine di γ_q è connessa (perché $[0,1]$ lo è) e contiene p. L'unione di tutte queste immagini al variare di q in Y è tutto Y, che è quindi unione di connessi contenenti p: quindi $Y = c(p)$ è connesso.

Consideriamo ora il sottospazio X di $\mathbb{R}^2$ dato. Il sottospazio $X \cap \{x > 0\}$ è connesso per archi perché è l'immagine della funzione continua $f : (0,1] \to \mathbb{R}^2, f(x) = \sin(1/x)$ definita sul connesso per archi $(0,1]$. Anche $X \cap \{x = 0\}$ è connesso per archi. Quindi X ha una o due componenti connesse per archi. Il sottospazio $X \cap \{x > 0\}$ non è chiuso in X: ad esempio il punto $(0,0)$ è limite della successione $(1/k\pi, 0) \in X \cap \{x > 0\}$ ma non è in $X \cap \{x > 0\}$. Quindi $X \cap \{x > 0\}$ non può essere una componente connessa per la Proposizione 1.4. Quindi X ha una sola componente connessa, cioè è connesso.

D'altra parte, non è troppo difficile verificare che non esiste una funzione continua $f : [0,1] \to X$ con $f(0) = (0,0)$ e $f(1) = (1/\pi, 0)$. Quindi X non è connesso per archi. $\square$

Osservazione 1.12. Segue dalla Proposizione 1.11 che ogni componente connessa di uno spazio X è unione di componenti connesse per archi di X. Otteniamo quindi una mappa suriettiva $C^{\mathrm{arc}}(X) \to C(X)$ per ogni X.

Le componenti connesse per archi non sono necessariamente chiuse: si vede facilmente che sono tutte chiuse se e solo se coincidono con le componenti connesse.

2. Retrazioni

Una retrazione $r : X \to A$ è un'*inversa sinistra* della inclusione $i : A \to X$, cioè $r \circ i : A \to A$ è la funzione identità. L'esistenza di una inversa destra è invece poco interessante:

Esercizio 2.1. L'inclusione $i : A \to X$ ha una inversa destra se e solo se è un omeomorfismo.

Proposizione 2.2. *Sia X uno spazio topologico che si retrae su un insieme $A \subset X$. Allora $C(A)$ non ha cardinalità superiore a $C(X)$. In particolare, se X è connesso allora A è connesso.*

Dim. La retrazione è continua e suriettiva, quindi segue dalla Proposizione 1.7. $\square$

Esempio 2.3. Esempi di retrazioni:

- $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1},\ f(x) = x/|x|$;
- $f : X \to p_0$ dove $p_0 \in X$ è un punto qualsiasi in uno spazio topologico X qualsiasi, data dalla funzione costante $f(p) = p_0$ per ogni $p \in X$;
- $f : \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq 0\} \to \{(z,0) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1\}$, con immagine omeomorfa a S^1, data da $f(z,w) = (z/|z|, 0)$;
- $f : \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq 0, w \neq 0\} \to \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w| = 1\}$, con immagine omeomorfa al toro $S^1 \times S^1$, data da $f(z,w) = (z/|z|, w/|w|)$.

3. Punti fissi

Vedremo (almeno per $n = 2$) che ogni mappa continua $f : D^n \to D^n$ ha almeno un punto fisso. Quali altri spazi, oltre al disco D^n, soddisfano questa proprietà? L'esempio seguente mostra che sono pochi:

Esempio 3.1. I seguenti spazi X ammettono mappe senza punti fissi:

- X spazio sconnesso qualsiasi: prendiamo una qualsiasi mappa che manda costantemente ogni componente connessa in un punto fissato contenuto in un altra componente connessa,
- $X = S^n$: prendiamo la mappa antipodale $f : S^n \to S^n, f(x) = -x$,
- $X = \mathbb{R}^n$: prendiamo una traslazione qualsiasi,
- $X = B^n = D^n \setminus \partial D^n$ (la palla), perché è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$ tramite l'omeomorfismo $\phi : B^n \to \mathbb{R}^n$ dato da $\phi(x) = x \cdot \tan(|x\pi/2|)$. Quindi il diagramma
$$\begin{tikzcd} B^n \arrow[r, "t"'] & B^n \arrow[d, "\phi"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "t'"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$
dove t è una traslazione qualsiasi, fornisce una mappa $t' = \phi \circ t \circ \phi^{-1}$ senza punti fissi.

Osservazione 3.2. A proposito della mappa da B^n in sé senza punti fissi, si noti come possiamo superare, tramite un omeomorfismo furbo, le difficoltà che abbiamo in generale nello scrivere funzioni continue tra spazi topologici: la maggior parte delle funzioni continue (anche da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ad esempio) infatti non ha una scrittura, cioè un "nome" che la identifichi.

Esercizio 3.3. Dimostrare (usando il caso noto per $X = D^n$) che ogni mappa continua da X in sé ha un punto fisso, per i seguenti spazi X:

- $(\star)$ $X = [-1,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1,1] \subset [-1,1] \times [-1,1]$,

- ($\star\star$) X è lo spazio descritto nella Proposizione 1.11.

Traccia. Nel primo caso, costruire una retrazione di D^2 su X. Nel secondo caso, notare che $C^{\mathrm{arc}}(X)$ consta di due componenti. Data $f : X \to X$, esaminare come può comportarsi $f_* : C^{\mathrm{arc}}(X) \to C^{\mathrm{arc}}(X)$ e vedere caso per caso. $\square$

4. Omotopia

4.1. **Mappe omotope.** Dati due sottoinsiemi $A \subset X$ e $B \subset Y$, una mappa $f : (X, A) \to (Y, B)$ è per definizione una mappa $f : X \to Y$ tale che $f(A) \subset B$. Due mappe continue $f, f' : (X, A) \to (Y, B)$ sono *omotope* se esiste una famiglia continua di mappe $f_t : (X, A) \to (Y, B), t \in [0, 1]$ che collega $f = f_0$ a $f' = f_1$. Sia $C(X, Y)$ lo spazio delle funzioni continue. Scriviamo $f \sim f'$ quando $f, f' \in C(X, Y)$ sono omotope.

Proposizione 4.1. *La $\sim$ è una relazione di equivalenza.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che $\sim$ è:

riflessiva: Abbiamo $f \sim f$: basta prendere $f_t = f$ per ogni t.

simmetrica: Se $f \sim f'$, c'è una famiglia $f_t : X \to Y, t \in [0, 1]$ continua che collega $f = f_0$ e $f' = f_1$. Prendendo $f'_t = f_{1-t}$ otteniamo una famiglia che collega $f' = f'_0$ e $f = f'_1$, quindi $f' \sim f$.

transitiva: Se $f \sim f'$ e $f' \sim f''$, abbiamo due famiglie continue f_t e f'_t che collegano rispettivamente f a f' e f' a f''. Definisco quindi f''_t nel modo seguente:

$$f''_t = \begin{cases} f_{2t} & \text{per ogni } t \leqslant 1/2, \\ f'_{2t-1} & \text{per ogni } t \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Le due definizioni coincidono per $t = 1/2$. Guardiamo alla famiglia f''_t come una mappa da $X \times [0, 1]$ in T. Le restrizioni di f''_t a $X \times [0, 1/2]$ e $X \times [1/2, 1]$ sono continue, coincidono sul chiuso $X \times \{1/2\}$, e quindi f''_t è continua su tutto $X \times [0, 1]$. Quindi è una omotopia che collega $f''_0 = f$ a $f''_1 = f''$, e abbiamo verificato la proprietà transitiva: $f \sim f''$. $\square$

Definiamo quindi $[(X, A), (Y, B)]$ come il quoziente $C\big((X, A), (Y, B)\big)/_\sim$.

Proposizione 4.2. *Se $f \sim f' : (X, A) \to (Y, B)$ e $g \sim g' : (Y, B) \to (Z, C)$, allora $g \circ f \sim g' \circ f' : (X, A) \to (Z, C)$.*

Dim. Le funzioni f e f' sono collegate da una omotopia f_t, e le funzioni g e g' sono collegate da una omotopia g_t. Quindi $g \circ f$ e $g' \circ f'$ sono collegate da una omotopia $g_t \circ f_t$. Per dimostrare questa ultima asserzione, devo però verificare che $g_t \circ f_t$ sia effettivamente continua su $X \times [0,1]$.

Per fare questo siamo costretti ad usare la notazione più pesante: scrivo f_t e g_t rispettivamente come $F : X \times [0,1] \to Y$ e $G : Y \times [0,1] \to Z$. La mappa $g_t \circ f_t$ si scrive quindi come:

$$\begin{array}{rccl} H: & X \times [0,1] & \to & Z, \\ & (x,t) & \mapsto & G(F(x,t),t). \end{array}$$

Ricordiamo che una funzione a valori in un prodotto è continua se e solo se sono continue le varie componenti: quindi la funzione $X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ data da $(F(x,t),t)$ è continua, perché lo sono F e t. Componendo questa funzione con G ottengo H, che è quindi continua perché composizione di funzioni continue.

□

Quindi la composizione fra funzioni passa al quoziente: date due classi $\alpha \in [(X,A),(Y,B)]$ e $\beta \in [(Y,B),(Z,C)]$ possiamo definire $\beta \circ \alpha \in [(X,A),(Z,B)]$.

Osservazione 4.3 ($\star$)**.** Fissata una coppia (X,A), otteniamo due funtori $[(X,A),*]$ e $[*,(X,A)]$ dalla categoria delle coppie in quella degli insiemi: il primo funtore associa alla coppia (Y,B) l'insieme $[(X,A),(Y,B)]$, mentre il secondo gli associa l'insieme $[(Y,B),(X,A)]$. Il primo funtore è *covariante*, cioè una mappa continua

$$(Y,B) \xrightarrow{f} (Z,C)$$

induce una funzione:

$$[(X,A),(Y,B)] \xrightarrow{f_*} [(X,A),(Z,C)],$$

mentre il secondo è *controvariante*, cioè "inverte le frecce": la stessa f induce una funzione

$$[(Y,B),(X,A)] \xleftarrow{f^*} [(Z,C),(X,A)].$$

Normalmente si indicano con f_* e f^* le mappe associate, rispettivamente nel caso covariante e controvariante.

L'affermazione seguente ci dice che i funtori C e C^{arc} non "vedono" l'omotopia, cioè non distinguono mappe omotope.

Proposizione 4.4. *Se $f, f' : X \to Y$ sono omotope allora inducono la stessa funzione $f_* = f'_* : C^{\mathrm{arc}}(X) \to C^{\mathrm{arc}}(Y)$ (e quindi anche la stessa $f_* = f'_* : C(X) \to C(Y)$).*

Dim. Sia f_t l'omotopia che collega f e f'. Quindi $f_0 = f$ e $f_1 = f'$. Per ogni $x_0 \in X$, le immagini $f_0(x_0)$ e $f_1(x_0)$ sono collegate da un arco $(f_t(x_0))_{t\in[0,1]}$, e quindi appartengono alla stessa componente connessa per archi di Y. Quindi $f_* = f'_*$. □

4.2. **Spazi omotopi.**

Definizione 4.5. *Due spazi X e Y sono* omotopi *se esistono due funzioni $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ tali che $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$.*

Esercizio 4.6. L'omotopia è una relazione di equivalenza nella classe degli spazi topologici.

Traccia. Le proprietà riflessiva e simmetrica sono facili. Per dimostrare la proprietà transitiva usare la Proposizione 4.2. □

Abbiamo già visto che i funtori C e C^{arc} non distinguono mappe omotope. Ne segue che non distinguono spazi omotopi:

Proposizione 4.7. *Se X e Y sono omotopi allora $C(X)$ e $C(Y)$ sono isomorfi (cioè sono insiemi con la stessa cardinalità). Anche $C^{\mathrm{arc}}(X)$ e $C^{\mathrm{arc}}(Y)$ sono isomorfi.*

Dim. Per ipotesi esistono $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ tali che $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$. La Proposizione 4.4 ci dice che $(g \circ f)_* = (id_X)_* : C(X) \to C(X)$. Inoltre $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ e $(id_X)_*$ è l'identità, perché C è un funtore (Proposizione 1.5). Quindi $g_* \circ f_* = id_X$. Analogamente si dimostra che $f_* \circ g_* = id_Y$. Quindi X e Y sono isomorfi. □

5. Gruppo fondamentale

5.1. **Definizione.** Il *gruppo fondamentale* $\pi_1(X, x)$ di uno spazio topologico X con *punto base* $x \in X$ è l'insieme dei lacci $\Omega_1(X, x)$, quozientato tramite omotopia. Sull'insieme $\Omega_1(X, x)$ è definito un prodotto, tramite concatenamento di lacci. L'asserzione seguente mostra che il prodotto è definito anche al quoziente $\pi_1(X, x)$.

Proposizione 5.1. *Se $\alpha_0 \sim \alpha_1$ e $\beta_0 \sim \beta_1$ sono lacci in $\Omega_1(X, x)$, allora $\beta_0 * \alpha_0 \sim \beta_1 * \alpha_1$.*

Dim. Se α_t e β_t sono le omotopie che collegano α_0 a α_1 e β_0 a β_1, allora l'omotopia $\alpha_t * \beta_t$ collega $\beta_0 * \alpha_0$ e $\beta_1 * \alpha_1$. Come nella dimostrazione della Proposizione 4.2, per accertarmi che questa sia continua devo però usare la notazione più pesante.

Siano $A : [0,1] \times [0,1] \to X$ e $B : [0,1] \times [0,1] \to X$ tali che $A(s,t) = \alpha_t(s)$ e $B(s,t) = \beta_t(s)$. L'omotopia $\beta_t * \alpha_t$ è data da:

$$\begin{array}{rccl} C: & [0,1]\times[0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} A(2s,t) & \text{per } s \leqslant 1/2, \\ B(2s-1,t) & \text{per } s \geqslant 1/2. \end{cases} \end{array}$$

ed è in effetti continua, perché attaccamento di due funzioni continue coincidenti sul chiuso $\{1/2\} \times [0,1]$. □

Tale prodotto non dà una struttura di gruppo su $\Omega_1(X,x)$, infatti nessuna delle richieste per essere un gruppo (associatività, esistenza dell'elemento neutro e dell'inversa) è soddisfatta! Le cose migliorano sensibilmente sul quoziente:

Proposizione 5.2. $(\pi_1(X,x), *)$ *è un gruppo.*

Dim. Si devono dimostrare le cose seguenti:

associatività: Dati tre lacci α, β, γ, dobbiamo mostrare che $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ sono omotopi. Abbiamo:

$$\begin{array}{rccl} (\alpha*\beta)*\gamma: & [0,1] & \to & X \\ & s & \mapsto & \begin{cases} \alpha(4s) & \text{per } s \leqslant 1/4, \\ \beta(4s-1) & \text{per } 1/4 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ \gamma(2s-1) & \text{per } s \geqslant 1/2. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \alpha*(\beta*\gamma): & [0,1] & \to & X \\ & s & \mapsto & \begin{cases} \alpha(2s) & \text{per } s \leqslant 1/2, \\ \beta(4s-2) & \text{per } 1/2 \leqslant s \leqslant 3/4, \\ \gamma(4s-3) & \text{per } s \geqslant 3/4. \end{cases} \end{array}$$

Una omotopia è data da:

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,1]\times[0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{2-t}\right) & \text{per } t \leqslant 2-4s, \\ \beta(4s-2+t) & \text{per } 2-4s \leqslant t \leqslant 3-4s, \\ \gamma\left(\frac{4s-4}{t+1}+1\right) & \text{per } t \geqslant 3-4s. \end{cases} \end{array}$$

Si veda Fig. 1: sia S l'unione del bordo del quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ e dei due segmenti storti contenuti in Q. Abbiamo $F(S) = x$, punto base di X. La mappa F è continua perché è l'incollamento di funzioni continue, che coincidono sui due segmenti storti (che sono chiusi).

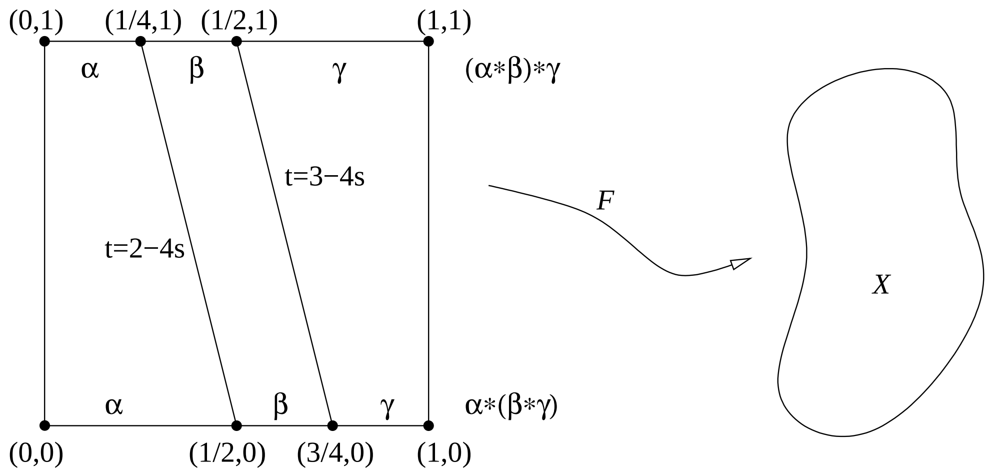

Figure 1: Schema per la dimostrazione della proprietà associativa.

elemento neutro: L'elemento neutro è dato dal laccio banale $\sigma(s) \equiv x$. Dobbiamo far vedere che $\alpha * \sigma$, $\sigma * \alpha$ e α sono lacci omotopi. Un'omotopia tra $\alpha * \sigma$ e α è data da:

$$\begin{aligned} F : [0,1] \times [0,1] &\to X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{2-t}\right) & \text{per } t \leqslant 2-2s, \\ x & \text{per } t \geqslant 2-2s. \end{cases} \end{aligned}$$

Si vede analogamente che $\sigma * \alpha$ è omotopo a α.

esistenza dell'inversa: Dato un laccio α, scriviamo α^{-1} il laccio $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$. Mostriamo che α^{-1} è l'inversa di α, cioè che $\alpha * \alpha^{-1}$, $\alpha^{-1} * \alpha$ e il laccio costante σ sono omotopi. Una omotopia tra $\alpha * \alpha^{-1}$ e σ è data da:

$$\begin{aligned} F : [0,1] \times [0,1] &\to X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} \alpha(2s) & \text{per } s \leqslant \frac{1-t}{2}, \\ x & \text{per } \frac{1-t}{2} \leqslant s \leqslant \frac{1+t}{2}, \\ \alpha(2-2s) & \text{per } s \geqslant \frac{1+t}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Si veda Fig. 2. Una omotopia tra $\alpha^{-1} * \alpha$ e σ si costruisce in modo analogo.

Notiamo la differenza fra le prime due omotopie, in cui le varie α, β, γ vengono riscalate al variare di t (cioé viene cambiata la velocità di percorrenza del

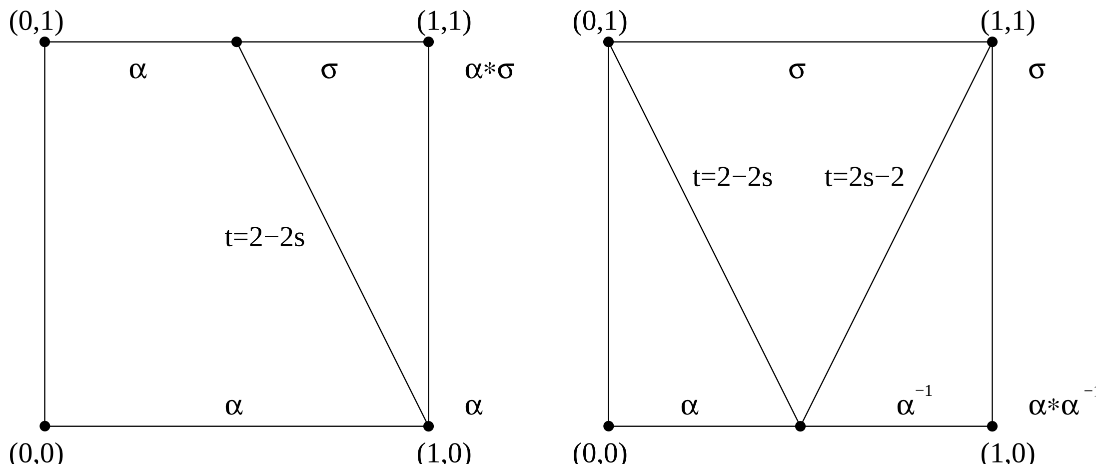

Figure 2: Schemi per la dimostrazione dell'esistenza dell'elemento neutro e dell'inversa.

laccio), e l'ultima, in cui le velcità di α e α^{-1} rimangono alterate, ma i lacci vengono troncati. $\square$

Una mappa continua $f : (X,x) \to (Y,y)$ definisce in modo naturale una mappa $f_* : \Omega_1(X,x) \to \Omega_1(Y,y)$, che associa ad un laccio $\alpha : [0,1] \to X$ il laccio $f \circ \alpha : [0,1] \to Y$ (verifichiamo che ha estremi in y perché $f(x) = y$).

Proposizione 5.3. *La mappa f_* è ben definita al quoziente $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ ed è un omomorfismo.*

Dim. Se $\alpha \sim \alpha'$ sono lacci omotopi, allora $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ per la Proposizione 4.2. Quindi f_* è ben definita. La f manda il laccio costante in x nel laccio costante in y, e inoltre $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ per ogni $\alpha, \beta \in \Omega_1(X,x)$: segue banalmente che f_* è un omomorfismo. $\square$

Osservazione 5.4. Quindi π_1 è un funtore dalla categoria degli spazi puntati (con mappe continue) alla categoria dei gruppi (con omomorfismi): le due proprietà elencate nella Proposizione 1.5 sono dimostrate facilmente. Notiamo subito che π_1 è un funtore più raffinato di C o C^{arc}, perché associa ad X (e a mappe continue) un gruppo (e omomorfismi) invece che un insieme (e mappe fra insiemi).

5.2. **Retrazioni.** Abbiamo visto che se $A \subset X$ è retratto di X, allora $C(A)$ non è più grande di $C(X)$. Vale un risultato simile per π_1:

Proposizione 5.5. *Se $A \subset X$ è retratto di X, allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce una mappa iniettiva $i_* : \pi_1(A, a) \hookrightarrow \pi_1(X, a)$, per ogni $a \in A$.*

Dim. Esiste una retrazione $r : X \to A$, cioè una inversa sinistra dell'inclusione $i : A \to X$. Quindi $r \circ i : A \to A$ è l'identità. Quindi

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(A, a)$$

è l'identità. Quindi $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ è iniettiva. □

Osservazione 5.6. A differenza dei funtori C e C^{arc}, $f : (X, x) \to (Y, y)$ suriettiva *non* implica $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ suriettiva in generale! I *rivestimenti*, che vedremo più avanti, forniscono numerosi controesempi. Non è neppure vero che f iniettiva implica f_* iniettiva.

5.3. **Dipendenza del punto base.** Per fortuna possiamo trascurare il punto base se X è connesso per archi, in virtù del seguente risultato:

Proposizione 5.7. *Se X è connesso per archi, $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, x')$ sono isomorfi (in modo non canonico!) per ogni x e x'.*

Dim. Sia $\lambda : [0, 1] \to X$ un arco con estremi in x e x'. Definiamo una mappa $\psi : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x')$ nel modo seguente: se $\alpha \in \pi_1(X, x)$, allora $\psi(\alpha)$ è il laccio ottenuto concatenando λ, α e λ^{-1}. Con le stesse tecniche della dimostrazione della Proposizione 5.2 si vede che ψ è ben definita, è un omomorfismo, ed è iniettivo e suriettivo (si consiglia di fare le verifiche per esercizio!). L'isomorfismo non é canonico perché dipende dalla scelta dell'arco λ. □

L'isomorfismo non è canonico perché ci sono scelte arbitrarie da fare per costruirlo: la situazione è simile a quella per cui ogni spazio vettoriale V di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{K}^n$ in modo non canonico, perché si deve scegliere una base.

D'ora in poi, quando scriviamo $\pi_1(X)$ indichiamo un qualsiasi gruppo $\pi_1(X, x)$. Dobbiamo però ricordarci che senza fissare un punto base x non è possibile associare ad un elemento di $\pi_1(X)$ un laccio in X (analogamente, senza una base per V non è possibile associare ad un elemento di $\mathbb{R}^n$ un vettore in V).

5.4. **Omotopia.** Abbiamo visto nella Sezione 4 che il funtore C non distingue mappe omotope. Non lo fa neanche il funtore π_1:

Proposizione 5.8. *Se $f, f' : (X, x) \to (Y, y)$ sono omotope, allora inducono lo stesso omomorfismo $f_* = f'_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$.*

Dim. Se α è un laccio in X, $f \circ \alpha$ e $f' \circ \alpha$ sono lacci omotopi in Y, e quindi rappresentano lo stesso elemento in $\pi_1(Y, y)$. □

Come per C e C^{arc}, se ne deduce che π_1 non distingue spazi omotopi.

Corollario 5.9. *Se X e Y sono omotopi, allora $\pi_1(X)$ e $\pi_1(Y)$ sono isomorfi.*

Dim. Stessa dimostrazione della Proposizione 4.7. □

5.5. **Retratto forte di deformazione.** Un sottoinsieme $A \subset X$ è un *retratto forte di deformazione* di X se esiste una famiglia continua $(f_t)_{t\in[0,1]}$ di mappe da X in sé, che collega l'identità $f_0 : X \to X$ ad una retrazione f_1 di X su A, tale che $f_t|_A : A \to A$ sia l'identità per ogni t.

Proposizione 5.10. *Se $A \subset X$ è un retratto forte di deformazione di X allora l'inclusione $i : A \to X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$, per ogni punto base $a \in A$.*

Dim. Sappiamo già che i_* è iniettiva, per la Proposizione 5.5. Sappiamo inoltre che c'è una retrazione $r : X \to A$ tale che $i \circ r : X \to X$ è omotopa all'identità id_X: quindi $(i \circ r)_* = i_* \circ r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, a)$ è l'identità, e quindi i_* è anche suriettiva. □

Usando questo risultato possiamo calcolare il gruppo fondamentale di molti spazi topologici.

Esercizio 5.11. Si calcoli $\pi_1(X)$ per i seguenti spazi topologici X:

(1) $X \subset \mathbb{R}^n$ è *stellato* (cioè esiste $p \in X$ tale che $r \cap X$ è connesso per ogni retta r passante per p),
(2) $X = C(Y) = Y \times [0, 1]/_\sim$ con $(y, 0) \sim (y', 0)\ \forall\ y, y' \in Y$ è il *cono* di uno spazio topologico (non necessariamente connesso) Y: mostrare inizialmente che $C(Y)$ è connesso per archi,
(3) $X = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0\big\}$,
(4) $X = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0,\ x^2 + y^2 \geqslant 1\big\}$,
(5) $X = \mathbb{R}^n \setminus V$ dove V è un sottospazio di dimensione k, con $0 \leqslant k < n$,
(6) $X = \mathbb{C}^n \setminus V$ dove V è un sottospazio di dimensione k, con $0 \leqslant k < n$,
(7) $(\star)$ $X = \mathbb{CP}^n \setminus P$ dove P è un sottospazio proiettivo di dimensione k,
(8) $(\star\star)$ $X = \mathbb{C}^n \setminus (V \cup V')$ dove V e V' sono sottospazi distinti di dimensione $n - 1$,
(9) $X = \mathbb{R}^3 \setminus (r \cup r')$ dove r e r' sono due rette (considerare i casi in cui si intersecano o no),
(10) $X = S^2 \setminus \big\{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\big\}$ e $X = S^2 \setminus \big\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big\}$, (è la sfera con due o tre buchi)
(11) $(\star)$ $X = S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$ (è il toro con un buco).

5.6. **Van Kampen.** In altri casi può essere necessario o più opportuno usare Van Kampen:

Esercizio 5.12. Si calcoli $\pi_1(X)$ per i seguenti spazi topologici X:

(1) $X = S(Y) = Y \times [0,1]/_\sim$ con $(y,0) \sim (y',0), (0,y) \sim (0,y')\ \forall\, y,y' \in Y$ è la *sospensione* di Y: considerare inizialmente il caso Y connesso,
(2) X è una conica semplicemente degenere in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,
(3) $(\star\star)$ X è una conica non degenere in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,
(4) $(\star\star)$ X è una cubica riducibile in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con un solo punto singolare (ci sono due casi da considerare!),
(5) $(\star\star\star)$ X è una cubica liscia in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,
(6) $X = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z\cdot(x^2+y^2+z^2-1) = 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$,
(7) $(\star)$ $X = \big\{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = 1\big\} \cup \big\{(0,0,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z^2+t^2 = 1\big\}$,
(8) $(\star)$ $X = \big\{(x_1,x_2,x_3,0,0,0) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\big\} \cup \big\{(0,0,0,x_4,x_5,x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_4^2+x_5^2+x_6^2 = 1\big\}$,
(9) $(\star\star)$ $X = \big\{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3\ \big|\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, (z_1-1)(z_2-1) = 0\big\}$.

6. Complessi cellulari

6.1. **Prodotto libero.** Il prodotto libero $G*H$ fra due gruppi G e H è definito come l'insieme delle parole costruibili con le lettere date dall'insieme $G \cup H$, quozientato da una relazione di equivalenza $\sim$ che ora definisco. Abbiamo $p \sim p'$ se la parola p' è ottenibile da p tramite una sequenza finita di mosse di questo tipo:

- una sottoparola "g_1g_2" di p, fatta di due lettere $g_1, g_2 \in G$ è sostituita con la lettera "g_3", dove $g_3 = g_1 \cdot g_2 \in G$ rispetto all'operazione "$\cdot$" di G (e analoga mossa se p contiene una sottoparola "h_1h_2" di elementi h_1, h_2 di H);
- cancellazione di una lettera di p corrispondente all'elemento identità di G o di H;
- l'inversa di una delle due mosse già descritte (quindi sostituire g_3 con g_1g_2 se $g_1 \cdot g_2 = g_3$, e aggiungere elementi neutri a piacimento).

L'insieme $G * H$ è dotato di una operazione binaria molto semplice: date due parole p, p', definiamo la parola pp' come la parola ottenuta concatenando p e p'.

Proposizione 6.1. *L'operazione di concatenamento è ben definita e $G * H$ è un gruppo.*

Dim. Se $p_1 \sim p_2$ e $p_1' \sim p_2'$ allora p_2 e p_2' sono ottenuti con delle mosse da p_1 e p_1'. Quindi p_2p_2' è anch'egli ottenuto da p_1p_1' tramite mosse. Quindi l'operazione di concatenamento è ben definita al quoziente.

Dimostriamo ora che $G * H$ è un gruppo. La proprietà associativa è ovvia. L'elemento neutro è semplicemente la parola vuota. Resta solo l'esistenza dell'inversa: data una parola $p = a_1 \cdots a_k$, dove ogni a_i sta in G o in H, la sua inversa è semplicemente $p^{-1} = a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$: infatti $pp^{-1} = a_1 \cdots a_k a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$ è equivalente a $a_1 \cdots a_{k-1} a_{k-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$, e cancellando coppie adiacenti opposte dopo altri $k-1$ passaggi si ottiene la parola vuota. $\square$

Proposizione 6.2. *Ogni elemento di $G * H$ si scrive in modo unico come parola* ridotta *$a_1 \ldots a_k$, dove $a_{2i-1} \in G$ e $a_{2i} \in H$ per ogni i (oppure viceversa $a_{2i-1} \in H$ e $a_{2i} \in G$ per ogni i), e nessun a_i è l'elemento neutro (di G o H).*

Dim. Se una parola p non è ridotta, può essere trasformata in una parola più corta tramite una delle due mosse. Quindi dopo un numero finito di mosse si ottiene necessariamente una parola ridotta (che può essere anche vuota). Non è difficile vedere che la parola ridotta ottenuta dipende solo da p (e non dalle mosse scelte). Inoltre se p' è ottenuto da p tramite una qualche mossa, è facile vedere che le ridotte di p' e p coincidono: quindi ogni classe di parole ha un solo rappresentante ridotto. $\square$

Esercizio 6.3. Il prodotto libero è una operazione commutativa ($G*H$ e $H*G$ sono isomorfi) e associativa ($(G * H) * L$ e $G * (H * L)$ sono isomorfi).

Il *gruppo libero F_n di rango n* è quindi definito come $\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$, dove $\mathbb{Z}$ compare n volte.

Osservazione 6.4. Consideriamo per semplicità il caso $n = 2$: visto che F_2 non è abeliano (vedi Esercizio 6.5 sotto), abbandoniamo la scrittura additiva per $\mathbb{Z}$ e usiamo quella moltiplicativa. Scriviamo quindi gli elementi del "primo" $\mathbb{Z}$ come $\{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, \ldots\}$ e gli elementi del "secondo" $\mathbb{Z}$ come $\{\ldots, b^{-2}, b^{-1}, b^0, b^1, \ldots\}$, e scriviamo le operazioni in entrambi i gruppi in modo moltiplicativo, cosí ad esempio abbiamo $a^3a^{-2} = a$ e $bb^2 = b^3$.

Grazie alla Proposizione 6.2, ogni elemento di F_2 può essere scritto in modo unico come una parola p aventi lettere alternativamente del tipo a^i e b^j, con esponenti i e j sempre diversi da zero. Questi si moltiplicano e quindi si scrivono in forma ridotta nel modo ovvio: ad esempio moltiplicando a^2b^{-1} e b^1a^{-1} si ottiene $a^2b^{-1}b^1a^{-1} = a^2a^{-1} = a$. Analogamente, ogni elemento di F_n si scrive in modo unico come parola ridotta aventi lettere in $\{a_1, \ldots, a_n\}$, ciascuna lettera con un esponente diverso da zero, e con lettere adiacenti sempre distinte.

Esercizio 6.5. Se G e H sono entrambi non banali allora $G * H$ contiene infiniti elementi e non è abeliano.

Esercizio 6.6. Dimostrare che $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ contiene un sottogruppo di indice 2 isomorfo a $\mathbb{Z}$.

6.2. **Presentazioni.** Una *presentazione* è una scrittura del tipo

$$\mathcal{P} = \langle g_1, \ldots, g_n \mid r_1, \ldots, r_s \rangle$$

dove $r_1, \ldots, r_s$ sono parole aventi lettere in $\{g_1, \ldots, g_n\}$ con esponenti interi. La presentazione $\mathcal{P}$ definisce un gruppo G nel modo seguente: consideriamo F_n come il gruppo delle parole in $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Quindi ogni parola r_i è un elemento di F_n.

Definiamo quindi G come $F_n/N(r_1, \ldots, r_s)$, dove $N(r_1, \ldots, r_s)$ è il *normalizzato* dell'insieme $\{r_1, \ldots, r_s\}$, cioè il più piccolo sottogruppo normale di F_n che contiene l'insieme $\{r_1, \ldots, r_s\}$. Diciamo che $\mathcal{P}$ è una *presentazione del gruppo* G, e rimarchiamo il fatto che lo stesso G ha molte presentazioni diverse. Le lettere g_i sono i *generatori* e le parole r_j sono le *relazioni*. Infatti, $\{g_1, \ldots, g_n\}$ è un insieme di generatori per G (cioè ogni elemento di G si scrive come prodotto di questi).

Esempio 6.7. Abbiamo i seguenti isomorfismi:

- $\langle g_1, \ldots, g_n \mid \ \rangle \cong F_n$,
- $\langle g \mid g^k \rangle \cong \mathbb{Z}_k$
- $\langle g_1, \ldots, g_n \mid r_1, \ldots, r_s \rangle * \langle g'_1, \ldots, g'_{n'} \mid r'_1, \ldots, r'_{s'} \rangle \cong$ $\langle g_1, \ldots, g_n, g'_1, \ldots, g'_{n'} \mid r_1, \ldots, r_s, r'_1, \ldots, r'_{s'} \rangle$,

Esercizio 6.8. Abbiamo $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. La relazione $aba^{-1}b^{-1}$ si scrive anche $[a, b]$ e si chiama il *commutatore* di a e b.

Esercizio 6.9. Il *gruppo diedrale* D_{2k} definito come $\langle r, s \mid r^k, s^2, rsrs \rangle$ è isomorfo al gruppo delle simmetrie del k-gono regolare ($k \geqslant 3$): basta considerare r come la rotazione antioraria di angolo $2\pi/k$ e s come la simmetria rispetto all'asse x. Si dimostri che D_{2k} ha ordine $2k$, e che non è abeliano.

Osservazione 6.10. Aggiungendo una relazione r ad una presentazione, si quozienta il gruppo per il normalizzato di r. Quindi ad esempio D_{2k} è il quoziente di $\langle r, s \mid r^k, s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_k * \mathbb{Z}_2$ tramite la relazione $rsrs$. Ma è anche il quoziente di $\langle r, s \mid s^2, rsrs \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (isomorfismo da dimostrare!) tramite la relazione r^k.

Può capitare che la relazione r aggiunta non cambi il gruppo: questo succede se r è già contenuta nel normalizzato delle relazioni già presenti. Un facile esempio: $\langle a \mid a^6, a^8\rangle \cong \langle a \mid a^6, a^8, a^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ perché a^2 è contenuto nel sottogruppo di $\mathbb{Z}$ generato da a^6 e a^8.

Esercizio 6.11. Dimostrare che le seguenti presentazioni danno il gruppo banale: $\langle a \mid a^p, a^q\rangle$ se $(p,q) = 1$, $\langle a, b \mid ab^5, b\rangle$, $\langle a, b \mid ab^2, ba^3, a^7\rangle$.

Esercizio 6.12. Dimostrare che $\langle a, b \mid baba^{-1}\rangle$ e $\langle a, b \mid a^2b^2\rangle$ sono isomorfi

Proposizione 6.13. *Ogni gruppo finito ha una presentazione. Un gruppo contenente una quantità più che numerabile di elementi non ha una presentazione. Infine, $\mathbb{Q}$ non ammette una presentazione.*

Dim. Se G è finito, si prendano come generatori tutti i suoi elementi e come relazioni le parole di 3 lettere $g_1g_2g_3^{-1}$ al variare di $(g_1, g_2) \in G \times G$, con $g_3 = g_1g_2$. D'altra parte, F_n contiene una quantità al più numerabile di elementi, e quindi anche ogni suo quoziente. Il gruppo $\mathbb{Q}$ non ammette una presentazione perché non ammette un numero finito di generatori. $\square$

Esercizio 6.14. Scrivere una presentazione per il gruppo simmetrico S_n, per il gruppo di simmetrie del tetraedro, e del cubo.

Esercizio 6.15. ($\star$) Dimostrare che F_k contiene sottogruppi isomorfi a F_h per ogni $h, k \geqslant 2$.

Esercizio 6.16. ($\star\star$) Dimostrare che ogni sottogruppo di F_k è isomorfo ad un F_h, per qualche h.

Esercizio 6.17. ($\star\star\star$) Dimostrare che $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ è isomorfo al gruppo

$$\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\} /_\sim$$

dove gli elementi di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sono matrici 2×2 a coefficienti interi, e due matrici A e B sono equivalenti $A \sim B$ se e solo se $B = \pm A$.

Traccia. Abbiamo $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2, b^3\rangle$. Dimostrare che $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle A, B \mid A^2, B^3\rangle$ dove A e B sono le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Si deve dimostrare che A e B generano il gruppo, e che non ci sono ulteriori relazioni oltre a $A^2 = B^3 = 0$.) $\square$

6.3. **Van Kampen.**

Teorema 6.18. *Supponiamo uno spazio topologico X sia unione di due aperti connessi per archi X_1, X_2, con intersezione $X_1 \cap X_2$ connessa per archi. Supponiamo:*

$$\pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \langle S \mid R\rangle, \quad \pi_1(X_1) \cong \langle S_1 \mid R_1\rangle, \quad \pi_1(X_2) \cong \langle S_2 \mid R_2\rangle.$$

Consideriamo le mappe

$$\psi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2) \to \pi_1(X_1), \quad \psi_2 : \pi_1(X_1 \cap X_2) \to \pi_1(X_2)$$

indotte dalle inclusioni. Allora:

$$\pi_1(X) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle$$

dove $R_S = \{\psi_1(s)\big(\psi_2(s)\big)^{-1} \mid s \in S\}$.

Corollario 6.19. *Se* $\pi_1(X_1) = \{e\}$, *allora* $\pi_1(X) = \pi_1(X_1)/_{N(\mathrm{Im}(\psi_2))}$.

Proof. In questo caso $S_1 = R_1 = \emptyset$ e $R_S = \{\psi_1(s) \mid s \in S\}$. □

6.4. **Celle.** Sia X uno spazio topologico e $\psi : \partial D^n \to X$ una mappa continua. Definiamo lo spazio topologico $X' = X \cup_\psi D^n$ ottenuto *attaccando una* n*-cella* D^n *a* X come $X' = (X \cup D)/_\sim$, dove $y \sim \psi(y)$ per ogni $y \in \partial D^n$.

Osservazione 6.20. Lo spazio $X' = X \cup_\psi D^n$ è l'unione disgiunta del chiuso X e della palla aperta $B^n \subset D^n$. La mappa $\psi : \partial D^n \to X$ dice come questi due insiemi sono "attaccati" fra loro: la ψ può anche essere non iniettiva e in generale molto complicata.

Lemma 6.21. *Se* $\psi_0, \psi_1 : \partial D^n \to X$ *sono mappe omotope, allora* $X_0 = X \cup_{\psi_0} D^n$ *e* $X_1 = X \cup_{\psi_1} D^n$ *sono spazi topologici omotopi.*

Dim. Dimostriamo che X_0 e X_1 sono entrambi contenuti in uno spazio più grande $\bar{X}$, e che sono entrambi retratti di deformazione di $\bar{X}$: ne segue che sono entrambi omotopi a $\bar{X}$, e che quindi sono omotopi tra loro.

Lo spazio $\bar{X}$ è il seguente: sia $\Psi : \partial D^n \times [0,1] \to X$ l'omotopia che collega ψ_0 e ψ_1. Definisco $\bar{X}$ come $X \cup_\Psi (D^n \times [0,1])$, cioè come lo spazio ottenuto attaccando a X una "torta" $D^n \times [0,1]$, tramite la mappa Ψ, che incolla quindi la parete verticale $\partial D^n \times [0,1]$ della torta su X. Gli spazi X_0 e X_1 sono naturalmente contenuti in $\bar{X}$ come $X \cup_\Psi (D^n \times \{0\})$ e $X \cup_\Psi (D^n \times \{1\})$.

Costruiamo ora una deformazione di $\bar{X}$ su X_1. La definiamo solo sulla torta $D^n \times [0,1]$, e lasciamo fissi tutti i punti di X. Per fare ciò, dobbiamo anche lasciare fissi tutti i punti della parete laterale $\partial D \times [0,1]$, visto che è incollata in qualche modo a X (e può essere incollata in modo brutto: ad esempio la mappa Ψ può non essere iniettiva). Consideriamo $D^n \times [0,1]$ dentro $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Prendiamo il punto $p = (0, \dots, 0, -1)$, che sta sotto la torta: le semirette uscenti da p intersecano la torta in segmenti, e definiscono quindi una deformazione in direzione uscente da p, che retrae la torta $D^n \times [0,1]$ su $\partial D^n \times [0,1] \cup D^n \times \{1\}$ (le pareti e il tetto della torta). Questa deformazione tiene fissi tutti i punti delle pareti, e quindi si estende ad una deformazione di $\bar{X}$ su X_1, che è l'unione di X e del tetto. Analogamente si costruisce una deformazione che retrae $\bar{X}$ su X_0, che è l'unione di X e del pavimento. $\square$

6.5. **Spazi localmente conici.** Da questo momento in poi, per evitare patologie, gli spazi avranno una struttura locale buona: diremo che uno spazio topologico X è *localmente conico* se ogni punto $p \in X$ ha un intorno $U(p)$ che è un cono su un compatto, di cui p è il vertice. Più formalmente, $(U(p), p) \cong (C(Y), v)$ dove $C(Y)$ è il cono su un compatto Y con vertice v. Il compatto Y può essere sconnesso, ma $C(Y)$ sarà sempre connesso.

Proposizione 6.22. *Sia X localmente conico.*

- *ogni punto ha un sistema di intorni conici omeomorfi tra loro,*
- *X è connesso per archi se e solo se è connesso,*
- *le componenti connesse di X sono aperte e chiuse.*

Dim. Ogni punto ha un intorno omeomorfo a $C(Y) = Y \times [0,1]/\sim$ per qualche Y, con $(y,0) \sim (y',0)$ per ogni $y, y' \in Y$. Un sistema di intorni per il vertice è dato dai "sottoconi" $X \times [0, 1/t]/\sim$, per $t \in \mathbb{N}$ (verificare! qui si usa che Y è compatto, altrimenti è falso).

Sia A una componente connessa per archi di X. Dimostriamo che è aperta: se $x \in A$, allora $U(x) \subset A$ per ogni intorno conico $U(x)$ di x (perché $U(x)$ è connesso per archi). Tutte le componenti connesse per archi di X sono aperte, quindi sono anche chiuse (perché ciascuna è complementare delle altre, che sono unione di aperti). Quindi le componenti connesse per archi coincidono con le componenti connesse (si veda l'Osservazione 1.12). $\square$

Esercizio 6.23. Dimostrare che i seguenti spazi X sono localmente conici:

(1) X è una *varietà topologica* (cioè ogni punto ha un intorno omeomorfo a una palla B^n),
(2) X è l'unione finita di rette in $\mathbb{R}^2$,
(3) ($\star$) X è l'unione finita di piani in $\mathbb{R}^3$,
(4) ($\star\star$) X è l'unione finita di sottospazi affini in $\mathbb{R}^n$,
(5) X è un sottoinsieme aperto di uno spazio localmente conico,
(6) ($\star\star\star\ldots$) X è una curva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,
(7) ($\star\star\star\ldots$) $X = Y \times Z$ dove Y e Z sono localmente conici[1],

Esercizio 6.24. Descrivere uno spazio topologico che non sia localmente conico.

[1]A dire il vero, non so se gli spazi X contrassegnati con $\star\star\star\ldots$ sono localmente conici, ma credo di sì!

Esercizio 6.25 ($\star$)**.** Descrivere uno spazio topologico che sia localmente connesso (cioè ogni punto ha un sistema di intorni connessi) ma non localmente conico.

Esercizio 6.26 ($\star\star$)**.** Descrivere uno spazio topologico che sia localmente semplicemente connesso (cioè ogni punto ha un sistema di intorni semplicemente connessi) ma non localmente conico.

6.6. **Bouquet e 1-celle.**

Definizione 6.27. *Il* bouquet *(o* prodotto wedge*)* $X \vee Y$ *di due spazi topologici* X *e* Y *connessi per archi è uno spazio ottenuto identificando un punto* x *di* X *con un punto* y *di* Y*.*

Osservazione 6.28. Lo spazio $X \vee Y$ dipende dalla scelta di x e y, ma con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 6.21 si vede che la sua classe di omotopia non dipende da questa scelta. In particolare, $\pi_1(X \vee Y)$ è ben determinato.

Esercizio 6.29. Se X e Y sono localmente conici, allora lo è anche $X \vee Y$.

Proposizione 6.30. *Suppponiamo* X *e* Y *localmente conici e connessi. Allora* $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$*.*

Dim. Siano $U(x) \subset X$ e $U(y)$ intorni conici contenenti rispettivamente x e y. Gli insiemi X e Y (e quindi $U(x)$ e $U(y)$) possono essere identificati in modo canonico a sottoinsiemi di $X \vee Y$. Questi non sono aperti in generale, quindi per usare Van Kampen prendiamo gli insiemi $X' = X \cup U(y)$ e $Y' = Y \cup U(x)$, che sono aperti e connessi in $X \vee Y$. La loro intersezione è $U(y) \cup U(x)$. Poiché $U(x)$ e $U(y)$ sono conici, si retraggono fortemente su x e y, e quindi gli spazi X', Y' e $U(y) \cup U(x)$ si retraggono fortemente su X, Y e il punto $y \sim x$. Quindi Van Kampen ci dice che $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$. □

Teorema 6.31. *Sia* X' *connesso, ottenuto attaccando una* 1*-cella ad uno spazio* X *localmente conico. Se* X *è connesso, allora*

$$\pi_1(X') = \pi_1(X) * \mathbb{Z}.$$

Altrimenti X *ha due componenti connesse* X_1 *e* X_2*, e*

$$\pi_1(X') = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2).$$

Dim. Sia $\psi : \partial D^1 \to X$ la mappa di incollamento della 1-cella. Quindi l'immagine di ψ consta di due punti $\psi(-1)$ e $\psi(1)$ (che possono coincidere). Poiché X' è connesso, è facile vedere che X ha una o due componenti connesse, e nel secondo caso ciascuna componente contiene uno dei due punti $\psi(-1)$ e $\psi(1)$.

Se X è connesso, $\psi(-1)$ e $\psi(1)$ sono collegati da un arco α. Posso quindi muovere $\psi(1)$ lungo l'arco α finché non coincide con $\psi(-1)$: in questo modo quindi cambio con una omotopia la ψ con un'altra ψ' tale che $\psi'(-1) = \psi'(1)$. A questo punto $X' \cong X \vee S^1$, e quindi $\pi_1(X') \cong \pi_1(X) * \mathbb{Z}$.

Se X è sconnesso, allora $X' \cong X_1 \vee D^1 \vee X_2$ e quindi $\pi_1(X') \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(D^1) * \pi_1(X_2) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$. □

Esercizio 6.32 ($\star\star$)**.** Sia $X' = X/_\sim$ ottenuto da X connesso e localmente conico identificando due punti x e x' distinti di X. Allora $\pi_1(X') \cong \pi_1(X) * \mathbb{Z}$.

Traccia. Dimostrare che X' è omotopo a $X \cup_\psi D^1$ dove $\psi(-1) = x$ e $\psi(1) = x'$. □

6.7. 2**-celle.** Indichiamo con $N(G)$ il normalizzato di un sottogruppo G.

Teorema 6.33. *Sia X connesso e $X' = X \cup_\psi D^2$ ottenuto attaccando una 2-cella a X. Allora:*

$$\pi_1(X') = \pi_1(X)/_{N(\psi_*(\partial D^2))}$$

Dim. Usiamo Van Kampen con gli aperti

$$X_1 = X \cup_\psi \big(D^2 \setminus (0,0)\big), \qquad X_2 = B^2,$$
$$X_1 \cap X_2 = B^2 \setminus (0,0),$$

dove $B^2 \subset D^2$ è la palla aperta dentro D^2, si veda l'Osservazione 6.20. Notiamo ora che ∂D^2 è un retratto di deformazione forte di $D^2 \setminus \{(0,0)\}$. Possiamo estendere questa retrazione a X_1, lasciando fermi tutti i punti di X. Quindi X è un retratto di deformazione forte di X_1. Allora abbiamo:

$$\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X), \qquad \pi_1(X_2) = \{e\},$$
$$\pi_1(X_1 \cap X_2) \cong S^1$$

□