GEOMETRIA ANALITICA E ALGEBRA LINEARE 2008/09

ESERCIZI 27/10/2008

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[x]_4$ lo spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 4. Sia

$$U = \big\{p \in V \mid p(1) = 0, p(3) = 0\big\}.$$

Dimostra che U è un sottospazio vettoriale di V e trova una base per U. Determina un sottospazio $W \subset V$ tale che $V = U \oplus W$.

Esercizio 2. La *derivata* di un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

a coefficienti in un campo qualsiasi K è il polinomio

$$p'(x) = n a_x x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

Sia $V = \mathbb{C}[x]_2$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore o uguale a 2. Sia

$$U = \big\{p \in V \mid p(i) = 0, p'(2) = 0\big\}.$$

Dimostra che U è un sottospazio vettoriale di V e trova una base per U. Determina un sottospazio $W \subset V$ tale che $V = U \oplus W$.

Esercizio 3. Considera i sottospazi seguenti di $\mathbb{R}[x]_3$.

$$U_t = \langle 1 + x, t + x^2\rangle, \quad W = \langle x + x^2, x + x^3\rangle.$$

Qui U_t dipende da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Determina le dimensioni di $U_t, W, U_t + W$ e $U_t \cap W$ al variare di t. Determina una base di $U_{-1} \cap W$. Completa questa base a base di $\mathbb{R}[x]_3$.

Esercizio 4. Siano $v_1, \ldots, v_{k+1}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Dimostra che

$$\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle \Longleftrightarrow v_{k+1} \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle.$$

Esercizio 5. Sia K un campo qualsiasi. Siano U_1, U_2, U_3 sottospazi di K^3 tutti di dimensione 2. Mostra che esiste una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ tale che

$$v_1 \in U_2 \cap U_3, \quad v_2 \in U_3 \cap U_1, \quad v_3 \in U_1 \cap U_2$$

se e solo se $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dimostra che per ogni $0 < k < n$ esistono due sottospazi vettoriali U e W di dimensione rispettivamente k e $n - k$ tali che $V = U \oplus W$.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Siano U, W sottospazi. Sia $\dim W = n-1$. Allora

$$\dim U \cap W = \begin{cases} \dim U & \text{se } U \subset W, \\ \dim U - 1 & \text{se } U \not\subset W. \end{cases}$$

Esercizio 8. Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo K. Sia

$$V \times W = \big\{(v,w) \mid v \in V, w \in W\big\}$$

il prodotto cartesiano dei due insiemi V e W. Dotiamo V e W di una somma

$$(v,w) + (v',w') = (v+v', w+w')$$

e di un prodotto per scalare

$$\lambda(v,w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Mostra che $V \times W$ con queste due operazioni è uno spazio vettoriale. Mostra che $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una sua base. Mostra che le mosse seguenti trasformano $\mathcal{B}$ in un'altra base $\mathcal{B}'$:

(1) sostituire v_i con λv_i per qualche i e qualche $\lambda \neq 0$,
(2) sostituire v_i con $v_i + \lambda v_j$ per qualche $i \neq j$ e qualche $\lambda \neq 0$,
(3) scambiare v_i e v_j per qualche $i \neq j$.

Determinare come cambiano le coordinate di un vettore fissato v per ciascuna delle mosse.

Esercizio 10. Sia V spazio vettoriale di dimensione n. Mostra che non esistono $U_1, \ldots, U_{n-1}$ sottospazi di dimensione $n-1$ tali che $U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1} = \{0\}$.

Esercizio 11. Siano $U, V \subset K^n$ due sottospazi

$$U = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\big\},$$
$$V = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \mid b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0\big\}.$$

Sia $W \subset K^n$ il sottospazio

$$W = \langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \rangle.$$

Mostra che $\dim U \cap V = n - \dim W$.

Esercizio 12. Determina tre sottospazi U_1, U_2, U_3 di $\mathbb{R}^4$ tali che $\dim U_i = 2$ per ogni i e $U_i \oplus U_j = \mathbb{R}^4$ per ogni $i \neq j$. Riesci a determinarne più di tre con le stesse proprietà? Riesci a determinarne un numero infinito? Riesci a determinarne un numero infinito in K^4, dove K è un campo qualsiasi contenente un numero infinito di elementi?

Esercizio 13. Sia V uno spazio vettoriale e S, S' due insiemi finiti di vettori in V. Quale delle due uguaglianze seguenti è sicuramente vera?

$$\langle S \cup S' \rangle = \langle S \rangle + \langle S' \rangle,$$
$$\langle S \cap S' \rangle = \langle S \rangle \cap \langle S' \rangle.$$

Esercizio 14. Sia V uno spazio vettoriale. Siano U e W sottospazi di V. Siano $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ basi rispettivamente per U e W. Mostrare che i fatti seguenti sono tutti equivalenti.

(1) $U \cap W = \{0\}$,
(2) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$,
(3) $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base per $U + W$.

Mostra che il fatto seguente non è però equivalente ai precedenti

- $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W = \emptyset$

fornendo un controesempio.

Esercizio 15. Siano $U_t, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad V = \begin{cases} x_1 + tx_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base di $U_t, V, U_t \cap V$ e $U_t + V$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.