Geometria analitica e algebra lineare 2008/09

Esercizi 24/03/2009

Esercizio 1. In ciascuno dei casi seguenti, determinare equazioni parametriche e cartesiane per un piano P in $A^3_{\mathbb{R}}$ tale che:

1. P contenga i punti $(1,0,0)$, $(2,-1,-3)$ e $(0,2,1)$.

2. P contenga $(1,1,1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia A^3_K lo spazio affine tridimensionale su un campo K arbitrario. Siano

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = \pi \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y = 13 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

due rette in A^3_K. Determinare un'equazione cartesiana del piano parallelo ad r e s e passante per il punto $Q = (1,4,3)$.

Esercizio 3. Determinare in $A^3_{\mathbb{R}}$ un'equazione cartesiana del piano p contenente la retta comune ai piani

$$\pi_1 : \{ \; x + y = 3, \qquad \pi_2 : \{ \; 2y + 3z = 4$$

e parallelo al vettore $(3,-1,2)$.

Esercizio 4. Sia A^3_K lo spazio affine tridimensionale su un campo K arbitrario. Siano r e s due rette e Q un punto in A^3_K. Mostra che esiste sempre almeno un piano P parallelo ad entrambe le rette e passante per Q.

Nel caso $K = \mathbb{R}$, mostra che esiste un unico piano con queste proprietà se e solo se le due rette r e s non sono parallele.

Esercizio 5. Siano P_1, P_2, P_3 e P_1', P_2', P_3' due terne di piani affini distinti in $A^3_{\mathbb{R}}$. Consideriamo le intersezioni $Z = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ e $Z' = P_1' \cap P_2' \cap P_3'$. Dire se esiste una affinità f di $A^3_{\mathbb{R}}$ tale che $f(P_1) = P_1'$, $f(P_2) = P_2'$ e $f(P_3) = P_3'$ in ciascuno dei casi seguenti.

1. Z e Z' sono due punti.

2. Z e Z' sono due rette.

3. Z e Z' sono due insiemi vuoti.

Più precisamente: per ciascuno di questi casi, dimostrare che esiste sempre una affinità o descrivere un esempio in cui non esiste.

Esercizio 6. Siano r_1, r_2 due rette affini in $A^4_{\mathbb{R}}$. Mostra che esiste un sottospazio affine di dimensione 3 che le contiene. Mostra che tale sottospazio è unico se e solo se le due rette non sono né parallele né incidenti (cioè sono sghembe).

Esercizio 7. Considera le due rette in $A^4_{\mathbb{R}}$ seguenti, la prima dipendente da un parametro reale α:

$$r_\alpha : \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = \alpha t \\ x_4 = 1 + t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 1 - t \end{cases}$$

Sia S_α il più piccolo sottospazio affine di $A^4_{\mathbb{R}}$ che contiene r_α e s.

1. Determinare la dimensione di S_α al variare di α.
2. Determinare equazioni parametriche di S_α al variare di α.
3. Determinare equazioni cartesiane di S_0.
4. Determinare equazioni cartesiane di S_α al variare di α.

Esercizio 8. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette affini in $A^4_{\mathbb{R}}$. In ciascuno dei casi seguenti, dire se esiste una retta affine s in $A^4_{\mathbb{R}}$ che le interseca tutte e tre. Se esiste, determina le sue equazioni parametriche.

1. Le tre rette sono le seguenti:

$$r_1 = \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad r_3 = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

2. Le tre rette sono le seguenti:

$$r_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases} , \quad r_2 = \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 0 - 2t \\ x_3 = -1 + t \\ x_4 = -t \end{cases} \quad r_3 = \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali V e W, entrambi definiti su un campo K. Sia w un punto arbitrario di W. Considera V e W con la loro struttura affine. Mostra che $f^{-1}(w)$ è un sottospazio affine di V. Più in generale, se S è un sottospazio affine di W, mostra che $f^{-1}(S)$ è un sottospazio affine di V.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Sia r una retta affine di $\mathbb{R}^2$ non passante per l'origine. Mostra che $f^{-1}(r)$ è l'insieme vuoto o un piano affine di $\mathbb{R}^3$.