ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2021/22 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 5 marzo

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Una *struttura liscia* su una varietà topologica è una classe di compatibilità di atlanti lisci, o equivalentemente un atlante massimale.

Esercizio 1.2. Siano M e N due varietà topologiche e $f\colon M \to N$ un omeomorfismo locale. Mostra che, data una struttura liscia su N, esiste un'unica struttura liscia su M tale che f sia un diffeomorfismo locale.

Esercizio 1.3. Dimostra rigorosamente che la mappa costruita a lezione fra $\mathbb{RP}^1$ e S^1 è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.4. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d.

Esercizio 1.5. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x, y) = (x + 1, y), \qquad g(x, y) = (-x, y + 1).$$

Mostra che Γ agisce in modo libero e propriamente discontinuo.

Esercizio 1.6. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x, y) = \left(2x, \tfrac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \to M/_\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed il quoziente $M/_\Gamma$ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 1.7. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x,y,z) = (x+1,y,z), \qquad g(x,y,z) = (x,y+1,z),$$
$$h(x,y,z) = (-x,-y,z+1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/_\Gamma$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

2. Esercizi del 12 marzo

Esercizio 2.1. Mostra che una immersione iniettiva propria è un embedding.

Esercizio 2.2. Sia $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che la mappa inclusione $i\colon S \hookrightarrow M$ è un embedding. Mostra che i è propria se e solo se S è un sottoinsieme chiuso.

Esercizio 2.3. Sia $M \subset N$ una sottovarietà liscia e $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che $S \subset N$ è una sottovarietà liscia.

Esercizio 2.4. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \to N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.5. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t &\longmapsto (e^{pit}, e^{qit}) \end{aligned}$$

è una immersione iniettiva e che l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$.

Esercizio 2.6. Sia $f\colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà lisce. Mostra che

$$i\colon M \hookrightarrow M \times N, \qquad p \longmapsto \big(p, f(p)\big)$$

è un embedding.

Esercizio 2.7. Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se M è compatta allora non esistono sommersioni $M \to \mathbb{R}^k$ per nessun k.

Esercizio 2.8. Sia $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x,y,z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2-y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è un embedding.

Esercizio 2.9. Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein K in $\mathbb{R}^n$, per qualche n.

Esercizio 2.10. Costruisci un embedding del toro n-dimensionale

$$S^1 \times \cdots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

3. Esercizi del 19 marzo

Negli esercizi seguenti V è sempre uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Un elemento di $\mathcal{T}_h^k(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^*, in qualche ordine.

Esercizio 3.1. Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

(1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.
(2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.2. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1.

Esercizio 3.3. Siano $v^1, \dots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \dots \wedge v^k \neq 0$.

Esercizio 3.4. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)\big) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 3.5. Ricordiamo che $\mathbb{RP}^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera l'insieme

$$E = \big\{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \;\big|\; v \in l\big\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \to \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 3.6. Mostra che il fibrato tangente del toro n-dimensionale è banale per ogni n.

4. Esercizi del 26 marzo

Esercizio 4.1. Mostra che il fibrato tangente TK della bottiglia di Klein K ha una sezione mai nulla ma non ha due sezioni indipendenti.

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.3. Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base S^1 a meno di isomorfismi.

Esercizio 4.4. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \to \mathbb{R}^k$).

Esercizio 4.5. Sia M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale $E \to M$ tale che $TM \oplus E$ sia un fibrato vettoriale banale.

Esercizio 4.6. Costruisci un fibrato $E \to K$ con fibra $F = S^1$ sopra la bottiglia di Klein K, tale che E sia una 3-varietà compatta orientabile (consiglio: puoi usare un esercizio della prima settimana).

Esercizio 4.7. Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile M di dimensione n è contenuta in una varietà orientabile di dimensione $n+1$.

Esercizio 4.8. Sia X un campo vettoriale su una varietà M. Siano $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ una curva integrale e $p \in M$ un punto tali che $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = p$. Mostra che $X(p) = 0$.

5. Esercizi del 2 aprile

Esercizio 5.1. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] \equiv 0.$$

Esercizio 5.2. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 5.3. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 5.4. Costruisci un campo vettoriale mai nullo su ciascun spazio lenticolare $L(p,q)$.

Esercizio 5.5. Sia M varietà qualsiasi e N varietà non orientabile. Il prodotto $M \times N$ può essere orientabile?

Esercizio 5.6. Siano X, Y campi vettoriali in una varietà M. Mostra che

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}.$$

Questa è un'uguaglianza fra operatori su $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$. Il bracket $[A, B]$ di due operatori A, B è per definizione $[A, B] = AB - BA$. Qui $\mathcal{L}_X$ è la derivata di Lie lungo X. Nota che se $(h, k) = (1, 0)$ questo è equivalente all'identià di Jacobi sui campi vettoriali. Questa uguaglianza può essere enunciata dicendo che la derivata di Lie fornisce un omomorfismo di algebre di Lie da $\mathfrak{X}(M)$ nell'algebra di Lie degli operatori su $\Gamma(\mathcal{T}_k^h(M))$.

Esercizio 5.7. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Mostra che π è una equivalenza omotopica.

6. Esercizi del 9 aprile

Esercizio 6.1. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia contemporaneamente foglie compatte e non compatte (cerca di descrivere la foliazione in modo rigoroso, non solo con un disegno).

Esercizio 6.2. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di SO(3) sono l'identità, SO(3), e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 6.3. Sia D una distribuzione di rango k su una varietà M. Mostra che D è integrabile se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $p \in M$ esiste una sottovarietà $S \subset M$ di dimensione k contenente p tale che per ogni $q \in S$ vale $T_qS = D_q$.

Esercizio 6.4. Sia G un gruppo di Lie e $H < G$ un sottogruppo di Lie connesso. Mostra che H è normale in G se e solo se la corrispettiva sottoalgebra $\mathfrak{h}$ è un ideale.

Esercizio 6.5. Mostra che una distribuzione D di rango 1 (in una varietà M qualsiasi) è sempre integrabile.

Esercizio 6.6. Mostra che la mappa esponenziale $\exp\colon \mathfrak{so}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ è suriettiva. Descrivi un gruppo di Lie connesso per cui la mappa esponenziale non è suriettiva.

Esercizio 6.7. Sia M una varietà connessa. Sia $N \subset M$ una ipersuperficie connessa chiusa. Mostra che $M \setminus N$ ha una o due componenti connesse. Descrivi degli esempi in entrambi i casi.

7. Esercizi del 23 aprile

Esercizio 7.1. Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.

Esercizio 7.2. Mostra che una n-varietà M è orientabile $\iff$ esiste una n-forma mai nulla su M.

Esercizio 7.3. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1. Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 7.4. Sia $f: M \to N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

Esercizio 7.5. Sia $f: U \to V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \ldots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

Esercizio 7.6. Sia N una m-varietà senza bordo. Se $\varphi: M \to N$ è una mappa liscia e $\omega \in \Omega^k(N)$, otteniamo

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. $\square$

Esercizio 7.7. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma su M chiusa (cioè tale che $d\omega = 0$) e mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p): T_pM \to \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M.

Esercizio 7.8. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile $\iff$ per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker \alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

8. Esercizi del 30 aprile

Esercizio 8.1. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale. Mostra che le due varietà E e M sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 8.2. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Deduci il fatto seguente. Sia $M = U \cup V$ varietà con U, V aperti. Supponiamo che i numberi di Betti di $U \cap V, U, V, M$ siano tutti finiti. Allora

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Esercizio 8.3. Sia M una n-varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(N) &= b^i(M) \quad \forall i \leq n-1, \\ b^n(N) &= b^n(M) - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 8.4. Calcola i numeri di Betti della varietà M ottenuta da $\mathbb{R}^3$ rimuovendo gli assi x e y.

Esercizio 8.5. Dimostra che la superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ha $b^1 = \infty$.

Esercizio 8.6. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

Esercizio 8.7. Sia $S \subset \mathbb{CP}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione complessa $k \leq n$. Mostra che la mappa $i^* \colon H^{2k}(\mathbb{CP}^n) \to H^{2k}(S)$ è un isomorfismo.

Esercizio 8.8. Siano $L, L' \subset \mathbb{R}^n$ sottospazi affini.

(1) Mostra che le varietà $\mathbb{R}^n \setminus L$ e $\mathbb{R}^n \setminus L'$ sono omotopicamente equivalenti se e solo se $\dim L = \dim L'$.
(2) Mostra che se $\dim L > \dim L'$ allora ogni mappa continua $f \colon (\mathbb{R}^n \setminus L) \to (\mathbb{R}^n \setminus L')$ è omotopa ad una mappa costante.

9. Esercizi del 7 maggio

Esercizio 9.1. Dimostra il Lemma dei 5.

Esercizio 9.2. Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro e $p \in T$ un punto. Considera la 4-varietà $M = T \times T$ e le sottovarietà $N_1 = T \times \{p\}$ e $N_2 = \{p\} \times T$. Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Esercizio 9.3. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che
$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 9.4. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:
$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$
Qui g^E è il tensore euclideo. In altre parole
$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij}.$$
Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n:

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che il gruppo di isometrie $\mathrm{Isom}(H^n)$ di H^n agisce transitivamente sulla varietà riemanniana H^n.

Esercizio 9.5. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:
$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$
Calcola l'area del dominio
$$[-a, a] \times [b, \infty)$$
per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2.

Esercizio 9.6. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ.

Esercizio 9.7. Calcola i simboli di Christoffel nel piano iperbolico con il modello del semipiano H^2.

Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Calcola l'angolo fra v_t e l'asse delle ordinate (il risultato dipende da t).

Esercizio 9.8. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del sempiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni di Möbius
$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$
con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

Esercizio 9.9. Sia M una varietà pseudo-Riemanniana connessa. Sia $p \in M$ un punto. Il *gruppo di olonomia* di M in p è il sottoinsieme

$$H_p = \left\{ \Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} \right\} \subset \mathrm{O}(T_pM, g(p))$$

ottenuto al variare di tutte le curve $\gamma \colon I \to M$ con $t_0 < t_1$ contenuti in I e tali che $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = p$. Mostra che H_p è effettivamente un sottogruppo. Mostra che se $p, q \in M$ allora H_p e H_q sono isomorfi. Determina il tipo di isomorfismo di H_p per $M = \mathbb{R}^n$ e $M = S^2$.

Esercizio 9.10. Sia (M, g) una varietà Riemanniana. La *divergenza* di un campo vettoriale X è definita come la contrazione del campo tensoriale ∇X di tipo $(1, 1)$. In coordinate:

$$\mathrm{div}(X) = \nabla_i X^i.$$

Mostra che in un qualsiasi sistema di coordinate valgono le formule seguenti:

$$\Gamma_{ji}^j = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{\det g},$$
$$\mathrm{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(X^i \sqrt{\det g} \right).$$

Nella scrittura Γ_{ji}^j usiamo la convenzione di Einstein.

10. Esercizi del 21 maggio

Esercizio 10.1. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$
$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica. Quali sono le geodetiche?

Esercizio 10.2. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico (B^n, g),

$$g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g^E(x)$$

dove g^E è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh t \cdot v = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} v.$$

Esercizio 10.3. Sia M una varietà dotata di una connessione ∇ e $\gamma \colon I \to M$ una curva. Mostra che il trasporto parallelo

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} \colon T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

è invariante per riparametrizzzazione di γ. Cioè, se prendiamo una mappa suriettiva $\alpha\colon J \to I$ con $\alpha'(t) \geq 0$ per ogni $t \in J$, allora

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} = \Gamma(\gamma \circ \alpha)_{u_0}^{u_1}$$

per qualsiasi $u_0, u_1 \in J$ con $\alpha(u_i) = t_i$.

Esercizio 10.4. Considera il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$. Mostra che per ogni $p, q \in I^n$ vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p, q) = -\langle p, q \rangle.$$

Esercizio 10.5. Una varietà riemanniana connessa è *omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste una isometria di M che porti p in q. Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

Una *isometria locale* fra varietà riemanniane è una $f\colon M \to N$ tale che per ogni $p \in M$ esistono intorni aperti $U(p)$ e $V(f(p))$ tali che $f(U) = V$ e $f|_U\colon U \to V$ sia un isometria.

Esercizio 10.6. Sia $f\colon M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse. Mostra che se M è completa, allora f è un rivestimento.

Esercizio 10.7. Sia $f\colon M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento. Mostra che M è completa $\iff$ N è completa.

Esercizio 10.8. Una varietà riemanniana connessa è *isotropa* in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$ di norma unitaria esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$. Mostra che una varietà riemanniana completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

Esercizio 10.9. Sia M una varietà Riemanniana connessa completa. Un *raggio* uscente da $p \in M$ è una geodetica $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ con $\gamma(0) = p$ e $\|\gamma'(0)\| = 1$ tale che $d(\gamma(t), p) = t$ per ogni $t \in [0, +\infty)$. Mostra che se M è non compatta allora per ogni p esiste un raggio uscente da p.

Esercizio 10.10 (Il toro di Clifton – Pohl)**.** Considera la varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotata della metrica Lorentziana

$$g(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni mappa $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ è una isometria. In particolare possiamo quozientare M con l'isometria $f(x, y) = (2x, 2y)$ e ottenere una superficie T diffeomorfa ad un toro. La struttura Lorentziana su M ne induce una su T. Dimostra che le curve

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right), \qquad \eta(t) = (\tan(t), 1)$$

sono entrambe geodetiche massimali definite su $(-\infty, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi T è compatta ma non geodeticamente completa (questo fatto è impossibile nelle varietà Riemanniane per Hopf – Rinow).