4. Compiti a casa — 7 novembre 2006

4.1. Ordini di grandezza e calcolo approssimato.

Esercizio 4.1. *Una valigia misura* $15cm$ *di larghezza,* $70cm$ *di lunghezza e* $45cm$ *di altezza. Quante palline da golf di raggio* $0.5cm$ *posso mettere in valigia?*

Esercizio 4.2. *Un carcerato si costruisce una fune con il filo interdentale e riesce ad evadere. Quante confezioni di filo interdentale da* $50m$ *ha usato, sapendo che un filo interdentale è approssimativamente un cilindro di raggio* $0.5mm$*, e la corda usata per evadere aveva un raggio di* $1cm$ *e una lunghezza di* $10m$*?*

Esercizio 4.3. *Quanti capelli stanno al massimo su di una testa umana sapendo che la superficie con capelli misura al massimo* $12cm$ *per* $25cm$ *e che lo spessore di un capello è circa* $50\mu m$ *ipotizzando che due capelli distino fra loro almeno dello spessore di un capello?*

Puoi dimostrare che al mondo ci sono almeno due persone con esattamente lo stesso numero di capelli? E in Italia? In Toscana? A Pisa?

4.2. Errori.

Esercizio 4.4. *Una cellula misura* $(4.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-7} m$ *di lunghezza,* $(4.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-7} m$ *di larghezza e* $(1.00 \pm 0.08) \cdot 10^{-7} m$ *di altezza. Quant'è il suo volume, se assumiamo che è approssimativamente*

a) *un parallelepipedo?*
b) *un cilindro?*

Quali sono gli errori assoluti nei due casi? E gli errori relativi?

4.3. Probabilità.

Esercizio 4.5. *In un esperimento tiro* 2 *monete non truccate e* 1 *dado a sei facce non truccato. Qual è lo spazio degli eventi? E se le monete e il dado sono truccati?*

Esercizio 4.6. *Qual è la probabilità di fare due teste e un* 2*? (nel caso non truccato)*

Esercizio 4.7. *In un esperimento tiro un dado a sei facce non truccato e sei monete non truccate. Qual è la probabilità di fare tante teste quanto indicato dal dado?*

Esercizio 4.8. *Risolvi i tre esercizi precedenti sapendo che le monete non sono truccate e che il dado è truccato come illustrato in tabella.*

numero	*probabilità*
1	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{32}$
3	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{8}$
5	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{2}$

Tabella 7. Dado truccato

Esercizio 4.9. *Giocando una schedina a caso al totocalcio (assumendo che* $1, X, 2$ *siano risultati equiprobabili per ogni partita), qual è l'evento più probabile? Fare 0, fare 1, …, fare 12, fare 13?*

Esercizio 4.10. *Qual è la somma più probabile da ottenere tirando due dadi a* 20 *facce? E tirando due dadi a* n *facce? Perché? Che probabilità hanno i due eventi?*

Esercizio 4.11. *Qual è la somma meno probabile da ottenere tirando due dadi a* 20 *facce? E tirando due dadi a n facce? Perché? Che probabilità hanno i due eventi?*

Esercizio 4.12. *Qual è la probabilità che tirando due dadi a tre facce e sommando il risultato si ottenga di più che tirando un dado a sei facce? E di meno? E uguale?*

Esercizio 4.13. *(Domanda teorica) Due eventi incompatibili possono essere indipendenti? Se no, perché? Se si, fa un esempio.*

5. Esercitazioni del 7 novembre 2006

Esercizio 5.1. *Due fabbriche producono la stessa lampada. La prima fabbrica produce il* 3% *di lampade difettose. La seconda produce il* 4% *di lampade difettose. Se una lampada è difettosa, qual è la probabilità che sia stata prodotta nella prima fabbrica?*

L'unica possibilità che ci può venire in mente per risolvere questo esercizio è "la prima produce il 3% di lampade difettose, la seconda il 4%, quindi la probabilità che una lampada difettosa sia stata prodotta dalla prima è $\frac{3}{7}$". Però questo ragionamento ha un difetto. Ogni volta che vediamo una percentuale, è importantissimo chiedersi "*percentuale di cosa?*". In questo caso, di ogni fabbrica ci viene data la percentuale di prodotti fallati rispetto a quelli prodotti. Ma non è affatto detto che le due fabbriche producano lo stesso numero di oggetti. Se le percentuali si riferiscono a due totali differenti e non noti, non possiamo risolvere l'esercizio, che è mal posto.

Infatti, se supponiamo che entrambe la fabbriche abbiano prodotto 100 lampade, allora ci sono 3 lampade difettose della prima fabbrica e 4 lampade difettose della seconda fabbrica, in totale 7. In questo caso è lecito affermare che la probabilità richiesta è $\frac{3}{7}$. Se invece la prima fabbrica ha prodotto 1000 lampade e la seconda 100, allora ci sono 30 lampade difettose della prima fabbrica e 4 lampade difettose della seconda fabbrica, in totale 34. In questo caso è lecito affermare che la probabilità richiesta è $\frac{30}{34}$, molto diversa dalla precedente.

Per dare un senso all'esercizio bisogna aggiungere un dato. Ad esempio, supponiamo che prendendo una lampada a caso, sia essa difettosa o no, la probabilità che sia stata prodotta nella prima fabbrica è p.

Allora, se in totale ci sono N lampade, pN sono state prodotte dalla prima fabbrica e $(1-p)N$ dalla seconda. Pertanto la prima fabbrica ha prodotto $d_1 = \frac{3}{100}pN$ lampade difettose e la seconda $d_2 = \frac{4}{100}(1-p)N$ lampade difettose. Le lampade difettose in totale sono

$$d = d_1 + d_2 = \frac{3}{100}pN + \frac{4}{100}(1-p)N = \frac{N}{100}(4-p),$$

e la probabilità che una lampada difettosa sia stata prodotta nella prima fabbrica è data da "casi favorevoli su casi totali":

$$q = \frac{d_1}{d} = \frac{\frac{3}{100}pN}{\frac{N}{100}(4-p)} = \frac{3p}{4-p}.$$

Ovviamente se sostituiamo $p = 0.5$ come nel primo esempio, otteniamo $q = \frac{3}{7}$, se sostituiamo $p = \frac{10}{11}$ come nel secondo esempio, otteniamo $q = \frac{30}{34}$, in accordo con quanto trovato prima.

Soluzione dell'Esercizio 2.7. Lo spazio degli eventi Ω a cui siamo interessati è quello delle cinquine non ordinate di numeri tra 1 e 90. Ogni singola estrazione di cinque elementi è equiprobabile, pertanto calcoleremo le probabilità richieste come "casi favorevoli su casi totali". La cardinalità[6] di Ω è il numero delle possibili

[6] la cardinalità di un insieme Ω è il numero di elementi di quell'insieme e si indica con $\sharp\,\Omega$ o con $|\Omega|$. Se un insieme ha infiniti elementi la cardinalità è un concetto un po' più complesso.

combinazioni senza ripetizione:

$$\sharp\,\Omega = \binom{90}{5} = \frac{90!}{85!\cdot 5!}.$$

Indichiamo con E_1 l'evento "viene estratto il numero 1 sulla ruota di Torino" (infatti noi, che grazie al corso di matematica e statistica per biologia la sappiamo lunga, evitiamo la cabala e metodi strani per scegliere un numero fra tanti equiprobabili e semplicemente scegliamo il primo[7]). Qual è la cardinalità di E_1? E_1 sono le cinquine formate da 1 e da altri 4 elementi scelti fra 2 e 90, a meno dell'ordine. Pertanto:

$$\sharp\,E_1 = \binom{89}{4} = \frac{89!}{85!\cdot 4!}.$$

La probabilità di E_1 è

$$P(E_1) = \frac{\sharp\,E_1}{\sharp\,\Omega} = \frac{1}{18} \approx 5.6\%.$$

Ovviamente c'era anche un altro modo di calcolare tutto ciò... Consideriamo l'esperimento in cui estraiamo tutte e 90 i numeri. Gli eventi T_n "il numero 1 viene estratto all'n-esimo tentativo", $1 \leq n \leq 90$, sono incompatibili, equiprobabili ed esauriscono i casi possibili. Pertanto

$$P(T_n) = \frac{1}{90}.$$

$E_1 = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$, dire che il numero 1 viene estratto è equivalente a dire che viene estratto nei primi cinque tentativi, e pertanto

$$P(E_1) = \sum_{n=1}^{5} P(T_n) = \frac{1}{18}.$$

Consideriamo ora l'evento $E_{1,2}$ "esce 1 o 2 sulla ruota di Torino". $E_{1,2} = E_1 \cup E_2$, ma i due eventi non sono incompatibili... può accadere che escano sia l'1 sia il 2... Pertanto

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{9} - P(E_1 \cap E_2).$$

Qual è la cardinalità di $E_1 \cap E_2$? $E_1 \cap E_2$ sono le cinquine formate da 1, da 2 e da altri 3 elementi scelti fra 3 e 90, a meno dell'ordine. Pertanto:

$$\sharp\,E_1 = \binom{88}{3} = \frac{88!}{85!\cdot 3!}.$$

La probabilità di $E_1 \cap E_2$ è

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{\sharp\,E_1 \cap E_2}{\sharp\,\Omega} = \frac{5\cdot 4}{90\cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

Pertanto

$$P(E_{1,2}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{801} = \frac{87}{801} \approx 10.9\%.$$

Se vogliamo calcolare la probabilità dell'evento $E_{1,\ldots,n}$, "viene estratto sulla ruota di Torino un numero minore o uguale a n", bisogna trovare una strategia più generale. Innanzitutto, ossorviamo che se $n \geq 86$, è certo che uno di questi venga estratto.

Supponiamo $n \leq 85$. Consideriamo l'evento complementare $N_{1,\ldots,n}$, "non viene estratto nessun numero minore o uguale a n sulla ruota di Torino". Una cinquina

[7] Generalmente i matematici, al posto di questo colorito discorso dicono: senza perdere di generalità, possiamo supporre di aver puntato sul numero 1.

in $N_{1,\dots,n}$ è una cinquina di numeri tra $n+1$ e 90, pertanto la c ardinalità di $N_{1,\dots,n}$ è

$$\sharp\, N_{1,\dots,n} = \binom{90-n}{5} = \frac{(90-n)!}{(85-n)! \cdot 5!},$$

e la probabilità richiesta è

$$P(E_{1,ldots,n}) = 1 - P(N_{1,\dots,n}) = 1 - \frac{(90-n)(89-n)(88-n)(87-n)(86-n)}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

Alcune probabilità sono date in tabella

n	p
5	25.4%
10	45.3%
12	52.0%
45	97.2%
86	100%

TABELLA 8. Probabilità di fare "estratto" giocando n numeri

Per avere almeno il 50% di probabilità di fare etratto al lotto, devo giocare 12 numeri sulla stessa ruota.

Esercizio 5.2. *Per quante settimane consecutive devo giocare lo stesso numero su una ruota per avere almeno il* 50% *di probabilità di fare estratto? Sempre* 12 *o questo è un problema diverso?*

Esercizio 5.3. *Ci sono* 5 *urne numerate da* 1 *a* 5*. Mettiamo a caso* 30 *palline indistinguibili nelle urne. Dopo aver opprotunamente matematizzato il problema, calcolare la probabilità che*

(1) *non ci siano palline nella prima urna (evento* N_1*);*
(2) *ci siano esattamente* 6 *palline in ogni urna (evento* $E_{6,6,6,6,6}$*).*

Innanzitutto chiediamoci cosa intendiamo con mettere a caso le palline nelle urne. Possiamo pensare di tirare un dado non truccato a 5 facce 30 volte e mettere una pallina nell'urna n ogni volta che esce il numero n.

Attenzione: lo spazio che stiamo considerando in questo modo è quello delle 30-uple ordinate di numeri tra 1 e 5:

$$\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5\}^{30},$$

ma la misura finale (contare le palline in ogni urna) non distingue fra loro alcuni degli eventi (l'evento esce 1 per 29 volte poi esec 2 è indistinguibile dall'evento esce 2 poi esce 1 per 29 volte). Pertanto lo spazio Ω degli eventi non è Ω'.

Ad ogni elemento di Ω' corrisponde uno e un solo elemento di Ω. Ad ogni elemento di Ω corrispondono invece uno o più elementi di Ω'. Dato che su Ω' la distribuzione di probabilità è quella uniforme, per calcolare la probabilità di un evento di Ω basta vedere quanti elementi di Ω' corrispondono a quell'evento e poi usare la formula "casi favorevoli su casi totali".

Dopo questa digressione iniziale, siamo pronti a fare i conti[8]! I "casi totali", ovvero gli elementi di Ω sono (5 possibilità per ogni tiro di dado, 30 tiri)

$$\sharp\, \Omega' = 5^{30}.$$

[8]Fai attenzione! Chiarire bene cosa si deve fare è forse la parte più importante di un esercizio.

L'evento N_1 corrisponde, in Ω a N_1' "nessuno dei trenta tiri ha dato come risultato 1". Equivale a dire che ogni volta è uscito un numero tra 2 e 5. In totale questi casi sono (4 per ogni tiro, 30 tiri)

$$\sharp\, N_1' = 4^{30}.$$

Pertanto

$$P(N_1) = P(N_1') = \frac{\sharp\, N_1'}{\sharp\, \Omega'} = \frac{4^{30}}{5^{30}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{30}.$$

L'evento $E_{6,6,6,6,6}$ (che in Ω è un evento semplice!) corrisponde in Ω' a tutti gli eventi in cui per 6 volte esce 1, per 6 volte esce 2, ecc. Per contare questi eventi, si deve prima scegliere in quali dei 30 lanci di dado esce 1: sei scelte su 30 possibilità:

$$\binom{30}{6}.$$

Si sceglie poi in quanti dei 24 lanci rimanenti esce 2:

$$\binom{24}{6},$$

e così via. Si ottiene che

$$\sharp\, E'_{6,6,6,6,6} = \binom{30}{6}\binom{24}{6}\binom{18}{6}\binom{12}{6} = \frac{30!}{(6!)^5}.$$

Pertanto

$$P(E_{6,6,6,6,6}) = \frac{\sharp\, E'_{6,6,6,6,6}}{\sharp\, \Omega'} = \frac{30!}{(6!)^5 \cdot 5^{30}}.$$

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, 7 — I-56126 Pisa, Italy
E-mail address: `a.saracco@sns.it`