Correzione primo compitino, testo B

20 febbraio 2010

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Facciamo riferimento alla pagina 20 del libro di testo. Nel caso di somma (o differenza) di misure abbiamo che il valore stimato della somma è somma (o differenza) dei valori stimati delle misure mentre l'errore assoluto della somma è la somma degli errori assoluti. Abbiamo ora che una cassa di arance, piena, pesa $10 \pm 0.2\,\mathrm{kg}$ mentre la cassetta vuota pesa $1.1 \pm 0.1\,\mathrm{kg}$. Quindi il peso stimato delle arance è $10 - 1.1 = 8.9\,\mathrm{kg}$ e l'errore di questa misura è $0.2 + 0.1 = 0.3\,\mathrm{kg}$. Le arance pesano quindi $8.9 \pm 0.3\,\mathrm{kg}$.

Esercizio 1.2. Ricordiamo la definizione di probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Come vi ricorderete, due eventi si dicono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ e quindi $P(A|B) = P(A)$. Quindi, se esistessero due eventi tali che $P(A|B) < P(A)$ questi NON potrebbero essere indipendenti. Proviamo quindi a pensare due eventi A e B fortemente dipendenti l'uno dall'altro; ad esempio, memori del primo compitino, a due eventi possibili ma che si escludono vicendevolmente. Avremo quindi che $P(A \cap B) = 0$ mentre $P(A)$ e $P(B)$ sono non nulle e dunque:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0 < P(A).$$

Esercizio 1.3. Per la media facciamo riferimento a pagina 135 del vostro libro di testo. La media di sette valori $x_1, \ldots, x_7$ è, per definizione, il numero

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}.$$

La somma $x_1 + \ldots + x_7$ sarà al più uguale a sette volte il valore più grande fra $x_1, \ldots, x_7$; essendo questi valori compresi tra 0 ed 1 la somma sarà al massimo 7, e quindi la media sarà al massimo $7/7 = 1$. In particolare la media dei valori NON può essere 2. Un'altra linea di ragionamento potrebbe essere la seguente: poiché la media è il numero μ tale per cui la somma

$$\sum_{i=1}^{7} (\mu - x_i) = 0,$$

abbiamo che la media deve essere compresa nell'intervallo dove variano i valori. Infatti se questo non fosse vero tutti gli addendi avrebbero lo stesso segno e quindi la loro somma non potrebbe essere 0.

Per la varianza facciamo invece riferimento a pagina 139. Se denotiamo la media con μ, la varianza è definita come:

$$\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\mu)^2}{7}.$$

Visto che la media appartiene all'intervallo $[0,1]$ al massimo ogni addendo può contribuire con $1/7$ (se $x_i = 0$ e $\mu = 1$). Questa situazione è impossibile, poiché se tutti gli x_i fossero uguali ad 1 anche la media sarebbe 1. Comunque, la varianza è sicuramente minore di $7 \cdot 1/7 = 1$.

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per la parte teorica relativa alle percentuali rimandiamo alle pagine 26 e seguenti del vostro libro di testo.

1. La percentuale di utilizzo dell'automobile da parte di Leonardo si usa la formula
$$\frac{\text{Ore di utilizzo di Leonardo}}{\text{Ore totali di utilizzo}} \cdot 100.$$
Le ore totali di utilizzo dell'automobile sono $360 + 840 = 1200$ ore. La percentuale di utilizzo di Leonardo sarà quindi $360/1200 \cdot 100 = 3/10 \cdot 100 = 30\%$, quindi la percentuale d'uso di Martina è del 70%. Poichè la cifra viene suddivisa in modo proporzionale alla percentuale di utilizzo, a Martina vanno $70\% \cdot 10000 = 7000$ euro.

2. A causa di una diversa interpretazione del testo ci sono due possibili risposte giuste a questo quesito. La prima è che il numero di ore totali di guida non cambi, mentre le ore di guida di Leonardo sono state calcolate con un errore relativo del 10%. Quindi le ore di guida di Leonardo sono 360 ± 36 e quindi la sua percentuale di utilizzo è compresa tra $324/1200 \cdot 100 = 27\%$ e $396/1200 \cdot 100 = 33\%$; la percentuale di utilizzo di Martina è quindi compresa tra 73% e 67% e quindi il suo ricavo può variare tra 6700 e 7300 euro.
La seconda interpretazione è che al variare delle ore di guida di Leonardo corrisponda anche il variare delle ore totali di guida. Quindi la percentuale di ore di guida di Leonardo oscilla tra:
$$\frac{324}{1164} \simeq 27.9\% \quad \text{e} \quad \frac{396}{1236} \simeq 30\%.$$
Quindi il ricavo di Martina varia tra 7210 euro e 7000 euro.

3. Per capire qual è il valore delle azioni rimaste a Martina dobbiamo capire qual è la percentuale di azioni in possesso di Martina alla fine della spartizione ed il valore totale delle azioni al momento delle spartizioni. Leonardo possiede il 40% delle azioni e ne cede il 20% a Martina. Dopo la spartizione Leonardo possiede quindi il $40\% \cdot 0.8 = 32\%$ delle azioni, mentre Martina ne possiede il $100 - 32 = 68\%$. Il valore totale delle azioni è diminuito del

10% ed è quindi, al momento della spartizione $15000 \cdot 0.9 = 13500$ euro. Il valore delle azioni rimaste a Martina è è quindi $13500 \cdot 0.68 = 9180$ euro.

4. Visto che non abbiamo il valore totale dei BOT, proviamo ad esprimere il valore dei BOT posseduti da Martina prima e dopo la spartizione usando il valore totale dei BOT come parametro. Chiameremo $V_{\mathrm{Tot},i}$ il valore totale iniziale dei BOT. Inizialmente Martina possedeva il $100 - 40 = 60\%$ dei BOT e quindi il valore dei BOT in suo possesso era $0.6 \cdot V_{\mathrm{Tot},i}$. Ora, alla fine del divorzio, Leonardo ha ceduto il 20% dei suoi BOT a Martina e ne possiede quindi il 32%, (come nel punto 3); la parte di Martina ammonta allora al 68% dei BOT. Ora il valore totale dei BOT è diminuito del 20% ed è quindi $V_{\mathrm{Tot},i} \cdot 0.8$; dunque il valore dei BOT possieduti da Martina alla fine della spartizione è $0.68 \cdot 0.8 \cdot V_{\mathrm{Tot},i}$. Dobbiamo ora confrontare i due valori:
$$0.6 \cdot V_{\mathrm{Tot},i} \quad ; \quad 0.68 \cdot 0.8 \cdot V_{\mathrm{Tot},i}.$$
Visto che $0.68 \cdot 0.8 = 0.544$ è minore di 0.6 il valore delle obbligazioni possedute da Martina è diminuito.

Esercizio 2.2.

1. In questo caso la probabilità è semplicemente il rapporto tra
$$\frac{\text{numero di eventi favorevoli}}{\text{numero di eventi possibili}} = \frac{6}{3+6+9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

2. Per questo punto si può fare riferimento alla pagina 91 del vostro testo. Questo tipo di esperimento si può modellizzare con un processo di Bernoulli. Estrarre una pallina nera è un esperimento che può riuscire con probabilità $p = 1/3$ e fallire con probabilità $q = 2/3$. Ripetiamo l'esperimento 4 volte, inoltre, poiché le estrazioni sono con reimbussolamento, le ripetizioni sono indipendenti. Quindi la probabilità di estrarre esattamente una pallina nera è
$$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^5}{3^4} = \frac{32}{81}.$$

3. L'evento E_1, "estrarre almeno una pallina nera", è l'evento complementare all'evento E_2, "non estrarre nessuna pallina nera". Calcoliamo la probabilità dell'evento E_2, la probabilità di E_1 sarà data da $1 - P(E_2)$. Poiché le estrazioni sono con rimbussolamento possiamo considerare ogni estrazione come un evento indipendente; se $2/3$ è la probabilità di non estrarre una pallina nera nella singola estrazione allora
$$P(E_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$
Dunque
$$P(E_1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{3^4 - 2^4}{3^4} = \frac{(3-2)(3+2)(3^2+2^2)}{9^4} = \frac{65}{9^4}.$$

4. Indichiamo con gli elementi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ le estrazioni. Il numero di modi in cui possiamo scegliere 2 elementi di questo insieme equivale al

numero di modi in cui possiamo scegliere le due estrazioni in cui sono estratte le 2 palline nere. Abbiamo quindi

$$\binom{4}{2} = 6$$

modi in cui possiamo scegliere le 2 estrazioni in cui sono estratte palline nere. Nelle altre due estrazioni le palline possono essere di due tipi (bianche o rosse); quindi possono avvenire in $D_{2,2} = 4$ modi diversi. Per il principio base del Calcolo combinatorio, il numero totale di sequenze possibili è $6 \cdot 4 = 24$.

Esercizio 2.3. 1. A pag. 71 del vostro libro potete trovare la legge di Hardy-Weinberg. Utilizzando la legge di Hardy-Weinberg calcoliamo la probabilità dei diversi genotipi. Indicheremo con p_L la probabilità dell'allele lungo, con p_{Lc} la probabilità del **genotipo** Lc, con F_L la probabilità del **fenotipo** lungo e così via. Nel testo del problema ci vengono date le probabilità dei singoli alleli:

$$p_L = 0.4, \quad p_c = 0.6.$$

Le probabilità dei diversi genotipi sono quindi:

$$p_{LL} = (0.4)^2 = 0.16, \quad p_{Lc} = 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.48, \quad p_{cc} = (0.6)^2 = 0.36.$$

Poiché il l'allele "L" è dominante abbiamo che le probabilità dei fenotipi sono:

$$F_L = p_{LL} + p_{Lc} = 0.64, \quad F_b = p_{cc} = 0.36.$$

2. Si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio ha coda lunga" e "il padre ha coda lunga e la madre ha coda corta". Dobbiamo calcolare innanzitutto la probabilità dell'intersezione, cioè la probabilità dell'evento "il figlio ha coda lunga e il padre ha coda lunga e la madre ha coda corta". Per ipotesi i genotipi dei genitori sono indipendenti. Poichè l'allele lungo è dominante possiamo trovarci di fronte a due possibili scenari:

   (a) padre "LL" e madre "cc" e figlio con coda lunga;

   (b) padre "Lc" e madre "cc" e figlio con coda lunga.

   La probabilità dell'intersezione cercata sarà la somma delle probabilità nel caso **a** e **b**. Calcoliamo quindi la probabilità nel caso **a**: per la legge di disgiunzione di Mendell la totalità dei figli di questa coppia avrà genotipo "Lc" e quindi coda lunga. La probabilità dell'evento "il figlio ha coda lunga e il padre ha genotipo "Lc" e la madre ha coda corta (genotipo "cc")" è quindi $p_{LL}p_{cc}$. Calcoliamo ora la probabilità nel caso **b**: la metà dei figli di questa coppia avrà genotipo "Lc" e quindi coda lunga mentre l'altra metà avrà genotipo "cc" e quindi coda corta. La probabilità dell'evento "il figlio ha coda lunga e il padre ha genotipo "Lc" e la madre ha coda corta (genotipo "cc")" è quindi $1/2 \cdot p_{Lc}p_{cc}$. La probabilità dell'intersezione è quindi:

$$p_{LL}p_{cc} + \frac{1}{2}p_{Lc}p_{cc}.$$

La probabilità dell'evento "il padre ha coda lunga e la madre ha coda corta" è invece uguale a $F_L \cdot F_c$. Siccome $F_c = p_{cc}$ la probabilità cercata è pari a:

$$\begin{aligned}\frac{p_{LL}p_{cc} + \frac{1}{2}p_{Lc}p_{cc}}{F_L \cdot F_c} &= \frac{p_{LL} + \frac{1}{2}p_{Lc}}{F_L} = \frac{p_L^2 + p_L p_c}{p_L^2 + 2p_L p_c} \\ &= \frac{p_L + p_c}{p_L + 2p_c} = \frac{1}{p_L + 2p_c} = \frac{10}{16}.\end{aligned}$$

3. Anche qui si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il genitore ha coda lunga" e "il figlio ha coda corta". Per calcolare la probabilità dell'intersezione come prima dobbiamo distinguere più casi:

   (a) genitore "LL", altro genitore qualsiasi, figlio coda corta;

   (b) genitore "Lc", altro genitore "LL", figlio coda corta;

   (c) genitore "Lc", altro genitore "Lc", figlio coda corta;

   (d) genitore "Lc", altro genitore "cc", figlio coda corta.

   I casi **a** e **b** hanno chiaramente probabilità 0. Ragionando come nel punto 2, vediamo che il caso **c** ha probabilità $1/4 \cdot p_{Lc} \cdot p_{Lc}$ ed il caso **d** ha probabilità $1/2 \cdot p_{Lc} \cdot p_{cc}$. Poiché la probabilità che il figlio abbia coda corta è pari a F_c abbiamo che la probabilità cercata è:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}p_{Lc}p_{cc} + \frac{1}{4}p_{Lc}p_{Lc}}{F_c} &= \frac{\frac{1}{2}p_{Lc}(p_{cc} + \frac{1}{2}p_{Lc})}{p_{cc}} = \frac{p_L p_c(p_c^2 + p_L p_c)}{p_c^2} \\ &= \frac{p_L p_c^2(p_c + p_L)}{p_c^2} = p_L(p_c + p_L) = p_L = 0.4.\end{aligned}$$

4. Poiché l'allele corto è recessivo, due genitori con coda corta non possono avere un figlio con la coda lunga, per cui la probabilità cercata è 0.