# Correzione terzo compitino, testo A

24 maggio 2010

## 1 Parte 1

*Esercizio* 1.1. Procederemo per esclusione, mostrando come alcune funzioni della lista non possano avere il grafico in figura. La prima cosa che possiamo notare è che il grafico della funzione in figura è simmetrico rispetto all'asse delle $y$. Questo significa che la funzione cercata è pari.

Possiamo perciò eliminare la funzione $x \cdot \cos x$, che è dispari; infatti:

$$(-x) \cdot \cos(-x) = -x \cos x,$$

poiché $\cos(-x) = \cos x$.

Anche la funzione $-x \sin^2 x$ è dispari:

$$-x \sin^2(-x) = -x \sin^2(-x) = -x(-\sin x) \cdot (-\sin x) = -x \sin^2 x,$$

poiché $\sin(-x) = -\sin x$. Possiamo quindi eliminarle entrambe dalla lista delle funzioni candidato.

Ora, notiamo che la funzione $x \tan x$ vale 0 nei multipli interi di $\pi$, mentre ha un asintoto verticale per ogni multiplo intero di $\pi/2$. Quindi i punti in cui la funzione attraversa l'asse delle $x$ sono separati l'uno dall'altro da un asintoto verticale, cosa che non avviene per la funzione del grafico; quindi possiamo eliminare anche la funzione $x \tan x$ dalle nostre candidate.

Per cui la funzione con il grafico assegnato è $x^2 \cos x$: è pari e non ha asintoti verticali.

*Esercizio* 1.2. Per risolvere questo integrale definito basta ricordarsi che la primitiva di $e^{\alpha t}$ (per $\alpha$ diverso da 0) è $\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + C$. Abbiamo quindi che:

$$\begin{aligned} \int_{\log 2}^{\log 3} e^{3t} dt &= \frac{1}{3} e^{3t} \Big|_{\log 2}^{\log 3} = \frac{1}{3} \left( e^{3 \log 3} - e^{3 \log 2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( e^{\log 3^3} - e^{\log 2^3} \right) = \frac{1}{3} \left( 27 - 8 \right) = \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

*Esercizio* 1.3. Degli esercizi molto simili, sull'argomento dei processi di Poisson, si trovano a pag. 430 del vostro libro. Ad ogni modo, dato un processo di Poisson di media $\mu$, abbiamo che la probabilità che nel dato intervallo di tempo avvengano $k$ eventi è:

$$p(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

La probabilità che avvenga almeno una mutazione è quindi data da:

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\log 20^0}{0!} e^{-\log 20} = 1 - \frac{1}{1}\frac{1}{20} = \frac{19}{20}. \end{aligned}$$

# 2 Parte 2

*Esercizio* 2.1. Per determinare i punti critici della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin x - \int_{27}^{x} e^{t^2} \cos t \, dt,$$

dobbiamo studiarne la derivata. Per il primo teorema fondamentale del calcolo (pag. 385 del vostro libro di testo) sappiamo che, se $g$ è una funzione continua definita tra $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{x} g(t) dt = g(x).$$

Quindi, ricordandoci che la derivata della somma è la somma delle derivate abbiamo:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \sin x - \frac{d}{dx} \int_{27}^{x} e^{t^2} \cos t dt = \cos x - e^{x^2} \cos x = (1 - e^{x^2}) \cos x.$$

Dobbiamo studiare ora gli zeri di $(1 - e^{x^2}) \cos x$; questa funzione si annulla se e solo se si annulla uno dei suoi fattori.

Cominciamo studiando l'equazione:

$$\cos x = 0.$$

La funzione coseno, di cui potete trovare il grafico a pag. 260 del vostro libro, si azzera ogni volta che la $x$ è uguale ad un multiplo dispari di $\pi/2$, cioè $x = (2k + 1) \cdot \pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Studiamo ora l'equazione

$$1 - e^{x^2} = 0.$$

Portiamo $-e^{x^2}$ al secondo membro ed otteniamo quindi l'equazione

$$e^{x^2} = 1.$$

Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri dell'equazione troviamo

$$x^2 = 0,$$

che è verificata solo se $x = 0$.

Quindi i punti critici della funzione sono i punti del tipo $x = (2k + 1) \cdot \pi/2$ per $k \in \mathbb{Z}$ ed il punto 0.

*Esercizio* 2.2. Studiamo la funzione

$$E(x) = 12 \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x}.$$

Ne troviamo innanzitutto il dominio di definizione: ci chiediamo quindi per quali valori di $x$ il polinomio $x^2 + 2x$ è nullo. Siccome $x^2 + 2x = x(x + 2)$ e un prodotto si annulla se si annullano is suoi fattori, le soluzioni di questa equazione sono $x = 0$ e $x = -2$. Quindi il dominio di definizione della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Guardiamo ora se la funzione è pari o dispari:

$$E(-x) = 12\frac{(-x)^2 - 2x + 2}{(-x)^2 - 2x} = 12\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x}.$$

In particolare $E(-1) = -12 \neq \pm 20 = \pm E(1)$, per cui la funzione $E$ non è né pari né dispari.

Studiamo ora il segno della funzione. Per prima cosa osserviamo che il numeratore è sempre positivo. Infatti, $x^2 + 2x + 2 = 0$ è un'equazione di secondo grado con discriminante minore di 0 e non ha quindi soluzioni reali. Poichè il coefficiente del termine di secondo grado è positivo, sappiamo che il numeratore sarà sempre positivo; quindi il segno di $E$ dipende solo dal segno del denominatore. Studiamo dunque la disequazione:

$$x^2 + 2x > 0.$$

Il grafico della funzione $x^2 + 2x$ è una parabola che passa per i punti $(0, 0)$ e $(-2, 0)$ (cioè il denominatore si annulla in 0 e $-2$) con la concavità rivolta verso l'alto. Il denominatore sarà quindi positivo per $x < -2$ o $x > 0$. Visto che il segno della funzione è il segno del denominatore, la funzione sarà negativa per $-2 < x < 0$, positiva per $x < -2$ o $x > 0$ e non è definita in 0 e $-2$.

Studiamo il limite a $+\infty$ della funzione:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} E(x) &= \lim_{x\to+\infty} 12\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} = 12 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \\ &= 12 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 12.\end{aligned}$$

Il limite a $-\infty$ si calcola in modo analogo:

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = 12 \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 12.$$

Quindi la funzione ha asintoto orizzontale sia a $+\infty$ sia a $-\infty$.

Studiamo ora i limiti nei punti singolari della funzione. La prima osservazione è che

$$\lim_{x\to0^+} 12\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to0^+} \frac{24}{x^2 + 2x}$$

poichè la funzione $x^2 + 2x + 2$ è continua in 0, e lì vale 2. Inoltre, abbiamo che:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{24}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\frac{24}{x + 2} = \lim_{x\to0^+} \frac{24}{x + 2} \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = 12 \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

di nuovo perchè la funzione $24/(x+2)$ è continua in 0. In modo analogo troviamo

$$\lim_{x\to0^-} 12\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to0^-} \frac{24}{x}\frac{1}{2} = -\infty.$$

Calcoliamo ora il limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} 12\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x} &= \lim_{x\to -2^+}\frac{24}{x^2+2x} = \lim_{x\to -2^+}\frac{24}{x(x+2)}\\ &= \lim_{x\to -2^+}\frac{24}{x}\cdot \lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2} = -12 \lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2} = -\infty.\end{aligned}$$

In modo analogo si calcola il limite:

$$\lim_{x\to -2^-} 12\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x} = -12 \lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Studiamo ora la derivata prima della funzione $E(x)$. Per calcolarla useremo la formula per la derivata di un quoziente:

$$E'(x) = 12\cdot\frac{(x^2+2x+2)'(x^2+2x)-(x^2+2x)'(x^2+2x+2)}{(x^2+2x)^2},$$

dove con l'apice ho indicato che devo prendere la derivata prima di ciò che è tra parentesi. La derivata prima sarà quindi:

$$E'(x) = 12\cdot\frac{(2x+2)(x^2+2x)-(2x+2)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x)^2} = -48\cdot\frac{x+1}{(x^2+2x)^2}.$$

Possiamo notare come il denominatore sia sempre positivo, al di fuori dei punti in cui non è definito. Lo studio del segno della derivata si riduce quindi allo studio del segno di $-48(x+1)$. Questa funzione è positiva se $x < -1$ ed è negativa se $x > -1$; sappiamo inoltre che la derivata si annulla in $-1$ e la funzione ha lì un massimo locale, in cui assume valore $-12$.

Studiamo ora la derivata seconda della funzione. Abbiamo che:

$$E''(x) = -48\cdot\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2-((x^2+2x)^2)'(x+1)}{(x^2+2x)^4}.$$

Per calcolare $((x^2+2x)^2)'$ usiamo la formula di derivazione per funzioni composte. Posto $y(x) = x^2+2x$ otteniamo:

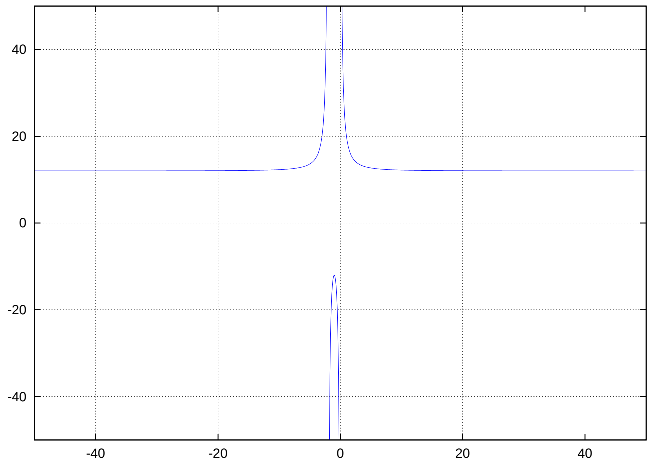
$$((x^2+2x)^2)' = (y(x)^2)' = 2y(x)y'(x) = 2(x^2+2x)(2x+2).$$

Quindi:

$$\begin{aligned}E''(x) &= -48\cdot\frac{(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)(2x+2)(x+1)}{(x^2+2x)^4}\\ &= -48\cdot\frac{x^2+2x-4(x+1)^2}{(x^2+2x)^3} = 48\cdot\frac{3x^2+6x+4}{(x^2+2x)^3}.\end{aligned}$$

Il numeratore è un polinomio di secondo grado ed il discriminante dell'equazione di secondo grado ad esso associata è negativo; questo implica che non ha soluzioni reali e poichè il segno del coefficiente del termine di secondo grado è positivo, il numeratore sarà positivo per ogni valore di $x$ in $\mathbb{R}$. Per cui il segno della derivata seconda della funzione dipende solo dal segno del denominatore, che sarà negativo se $-2 < x < 0$ e positivo per $x < -2$ o $x > 0$.

Sulla base di quanto studiato, possiamo disegnare il grafico della funzione, che sarà il seguente.




Rispondiamo ora ai quesiti del problema. Per acidità prossime allo 0 l'efficienza cresce indefinitivamente , mentre per valori molto grandi dell'acidità l'efficienza energetica del batterio tenda ad avere il valore 12, senza mai scendere al di sotto di questo valore. Infine, per acidità positive il nostro modello prevede che l'efficienza assuma i valori compresi nella semiretta $(12, +\infty)$.

*Esercizio* 2.3. Consideriamo la variabile aleatoria $X$ la cui funzione di distribuzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ è data da

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0; \\ \frac{1}{3}(t+1)^2 - \frac{1}{3} & \text{per } 0 \leq t \leq 1; \\ 1 & \text{per } t \geq 1. \end{cases}$$

Vogliamo innanzitutto calcolarne la densità di probabilità. Vi rimandiamo a pag. 440 del vostro libro di testo per la dimostrazione che la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua è la derivata della funzione di distribuzione. Perciò, visto che la funzione di distribuzione è definita a tratti, faremo la derivata sui singoli intervalli di definizione:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0; \\ \frac{2}{3}(t+1) & \text{per } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{per } t \geq 1. \end{cases}$$

Ora, per calcolare il valore atteso, facciamo riferimento alla formula a pag. 437. Questo è dato da

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt &= \int_{-\infty}^{0} t \cdot 0 \, dt + \int_0^1 \frac{2}{3} \cdot (t+1) t \, dt + \int_1^{+\infty} t \cdot 0 \, dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (t^2 + t) dt = \frac{2}{3} \left( \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare la varianza della variabile aleatoria, sempre facendo riferimento alla formula a pag. 437:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - E(X)\big)^2 f_X(t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(t^2 - \frac{10}{9}t + \frac{25}{81}\right)(t+1)\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 t^3 - \frac{10}{9}t^2 + \frac{25}{81}t + t^2 - \frac{10}{9}t + \frac{25}{81}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 t^3 - \frac{1}{9}t^2 - \frac{65}{81}t + \frac{25}{81}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{27} - \frac{65}{162}t^2 + \frac{25}{81}t\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{27} - \frac{65}{162} + \frac{25}{81}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{81 - 12 - 130 + 100}{324}\right) = \frac{13}{162}.
\end{aligned}
$$