

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE
SOLUZIONI TERZO SCRITTO

11 luglio 2007

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *Misurando un campo rettangolare trovi i seguenti dati per la base e l'altezza: $b = (100 \pm 1)$ m e $h = (20 \pm 1)$ m. Quali sono il valore stimato e l'errore assoluto dell'area del campo?*

L'area A del campo è data da $A = bh$. Siccome gli errori relativi dell'altezza ($e_h = 1/20 = 5\%$) e della base ($e_b = 1/100 = 1\%$) sono piccoli, possiamo usare per il valore stimato e l'errore del prodotto le formule approssimate.

$$\bar{A} \simeq \bar{b} \cdot \bar{h} = 2000 \text{ m}^2; \quad e_A \simeq e_b + e_h = 6\% .$$

Infine, l'errore assoluto è dato dal prodotto del valore stimato e dell'errore relativo: $E_A = 120 \text{ m}^2$.

Esercizio 1.2. *Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pari, può essere iniettiva? Se sì, fai un esempio; se no perché?*

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari se e soltanto se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se e soltanto se $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Quindi se f fosse una funzione pari iniettiva dovremmo avere $x = -x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, che è chiaramente falso. Pertanto non esistono funzioni pari iniettive.

Esercizio 1.3. *Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con $f'(x) \geq 3$ per $x \in [1, 2]$. La funzione f può essere decrescente in $[1, 2]$? Se sì, fai un esempio; se no perché?*

Una funzione derivabile con derivata positiva è sempre crescente. Quindi la funzione f , avendo derivata positiva in $[1, 2]$, non può mai essere decrescente in quell'intervallo.

2. PARTE II

Esercizio 2.1. *Misurando le lunghezze delle code di sei ratti che hai nel tuo laboratorio, trovi i seguenti dati: 11 cm, 8 cm, 7 cm, 7 cm, 12 cm, 9 cm.*

- (1) *Calcola media, mediana, moda e varianza della lunghezza della coda dei ratti del tuo laboratorio.*
- (2) *Calcola la probabilità che un ratto del tuo laboratorio preso a caso abbia la coda lunga meno di 10 cm.*
- (3) *Calcola la probabilità che un ratto del tuo laboratorio preso a caso abbia la coda lunga meno di 10 cm, sapendo però che non la ha lunga 7 cm.*
- (4) *Più in generale, può esistere un insieme di dati (non necessariamente ottenuti misurando la lunghezza delle code dei ratti) con media 0, moda $\{1\}$ e mediana -1 ? Se sì, fai un esempio; se no perché?*

(1) Media:

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{11 + 8 + 7 + 7 + 12 + 9}{6} \text{ cm} = 9 \text{ cm} .$$

Mediana:

$$\bar{x}, \bar{x}, 8, 9, 11, 12 : \quad \frac{8+9}{2} \text{ cm} = 8.5 \text{ cm} .$$

Moda: $\{7 \text{ cm}\}$. Varianza:

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (\bar{x} - x_i)^2 = \frac{4 + 1 + 4 + 4 + 9 + 0}{6} \text{ cm}^2 = \frac{11}{3} \text{ cm}^2 .$$

(2) Siccome ciascun ratto ha la stessa probabilità di essere scelto, la probabilità richiesta si può calcolare come rapporto fra il numero di casi favorevoli e il numero di casi totale. I casi favorevoli sono 4 (7 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm), i casi totali 6. Quindi $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

(3) Siccome dobbiamo escludere i ratti con coda lunga 7 cm, questa volta i casi favorevoli sono 2 (8 cm, 9 cm), e i casi totali 4 (8 cm, 9 cm, 11 cm, 12 cm), per cui la probabilità cercata è $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Soluzione alternativa: dobbiamo calcolare una probabilità condizionata. Se C è la variabile aleatoria che misura la lunghezza della coda, la probabilità che vogliamo calcolare è

$$P(C < 10 \text{ cm} | C \neq 7 \text{ cm}) = \frac{P(\{C < 10 \text{ cm}\} \cap \{C \neq 7 \text{ cm}\})}{P(C \neq 7 \text{ cm})} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2} .$$

Esercizio 2.2. *Inietti in una popolazione di cellule di ratto una quantità fissata di una certa sostanza. Sei interessato a studiare la densità di sostanza presente nella cellula in funzione del raggio della cellula. Misuri tre cellule della tua popolazione e ottieni le seguenti coppie di dati:*

$$(10 \text{ } \mu\text{m}, 96 \text{ g/cm}^3) ; \quad (15 \text{ } \mu\text{m}, 28 \text{ g/cm}^3) ; \quad (20 \text{ } \mu\text{m}, 12 \text{ g/cm}^3) .$$

Supponendo che la dipendenza della densità dal raggio della cellula sia di tipo quadratico, trova la funzione quadratica che rappresenta i tuoi dati. Per quali raggi la funzione trovata è sensata? Hai proposte alternative per una funzione che descriva il fenomeno studiato?

Indichiamo con δ la densità e con r il raggio. La generica funzione quadratica è della forma $\delta(r) = ar^2 + br + c$. Imponendo il passaggio per i punti che abbiamo si ottiene:

$$\begin{cases} 96 = 100a + 10b + c \\ 28 = 225a + 15b + c \\ 12 = 400a + 20b + c \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1.04 \\ b = -39.6 \\ c = 388 \end{cases}$$

Pertanto la funzione cercata è $\delta(r) = 1.04r^2 - 39.6r + 388$. Tale funzione può essere sensata fintanto che è decrescente e positiva, dato che, a quantità di sostanza fissata, ci si aspetta che la densità (rimanga positiva e) diminuisca al crescere del volume della cellula. Pertanto la funzione trovata potrebbe essere sensata fino al vertice della parabola, ma sicuramente non oltre. In questo caso il vertice della parabola ha coordinate

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right) \simeq (19, 11) .$$

Quindi $\delta(r)$ è sempre positivo (che ci sta bene), ma l'andamento della funzione è sensato solo fino a $r \simeq 19$. In particolare, la funzione trovata non è accettabile per $r = 20$, che è uno dei dati sperimentali; quindi dobbiamo dedurre che l'ipotesi di dipendenza quadratica della densità dal raggio è da scartare.

Siccome la densità si calcola come massa diviso volume, potrebbe essere più sensato supporre¹ che la densità dipenda in maniera inversamente proporzionale dal volume. Siccome il volume dipende dal cubo del raggio, siamo quindi portati a supporre una dipendenza del tipo

$$\delta(r) = \frac{C}{r^3}.$$

Usando le tecniche di interpolazione che abbiamo studiato si trova che prendendo $C = 96.15 \cdot 10^{-9} g$ si ottiene un'ottima interpolazione dei dati (coefficiente di Pearson pari a -0.9999).

Esercizio 2.3. *Studiando la quantità A di adrenalina rilasciata nel sangue di un ratto quando sente il miagolio di un gatto, in funzione dell'intensità I del miagolio, ottieni la seguente funzione:*

$$A(I) = 0.1 \log \left(\frac{2I+1}{I+1} \right).$$

Studia la funzione $A(I)$ per tutti i valori di $I \in \mathbb{R}$ per cui è definita.

Dominio. L'argomento del logaritmo deve essere positivo, ovvero

$$\frac{2I+1}{I+1} > 0.$$

Studiando il segno di numeratore ($2I+1 > 0 \iff I > -1/2$) e denominatore ($I+1 > 0 \iff I > -1$), si ottiene che il dominio D della funzione è

$$D = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

Segno. Affinché $A(I)$ sia positiva, occorre che l'argomento del logaritmo sia maggiore di 1, per cui

$$A(I) \geq 0 \iff \frac{2I+1}{I+1} \geq 1 \iff \frac{I}{I+1} \geq 0.$$

Studiando il segno di numeratore ($I \geq 0$) e denominatore ($I+1 > 0 \iff I > -1$), si ottiene che la funzione è nulla in 0, positiva in $D_+ = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ e negativa in

$$D_- = \left(-\frac{1}{2}, 0 \right).$$

Limiti. Studiamo i limiti al bordo del dominio, ricordando che il logaritmo è una funzione continua. All'infinito abbiamo

$$\lim_{I \rightarrow \pm\infty} A(I) = \left[0.1 \log \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right) \right],$$

che è una forma indeterminata. Raccogliendo I al numeratore e al denominatore dell'argomento del logaritmo otteniamo

$$\lim_{I \rightarrow \pm\infty} A(I) = \lim_{I \rightarrow \pm\infty} 0.1 \log \left(\frac{I(2 + \frac{1}{I})}{I(1 + \frac{1}{I})} \right) = 0.1 \log 2.$$

Per quel che riguarda i limiti sui bordi finiti del dominio troviamo

$$\lim_{I \rightarrow -1^-} A(I) = \left[0.1 \log \left(\frac{-1}{0^-} \right) \right] = [0.1 \log(+\infty)] = +\infty,$$

¹Ovviamente siamo nel campo delle ipotesi, che d'altronde fanno parte del lavoro del biologo. Potresti anche pensare che la densità possa dipendere in maniera inversamente proporzionale dalla superficie della cellula, ovvero dal quadrato del raggio. Sta a te poi verificare quale delle possibili ipotesi si sposa meglio con i dati sperimentali. . .

e

$$\lim_{I \rightarrow -\frac{1}{2}^+} A(I) = [0.1 \log(0^+)] = -\infty.$$

Derivata prima. Per studiare la crescita e la decrescita della funzione, calcoliamo la derivata prima:

$$A'(I) = 0.1 \frac{I+1}{2I+1} \cdot \frac{2(I+1) - (2I+1)}{(I+1)^2} = \frac{0.1}{(2I+1)(I+1)}.$$

Il numeratore è positivo, il denominatore è positivo nel dominio D (perché?) e quindi la funzione è crescente in ogni intervallo del dominio. In particolare, non ci sono massimi o minimi.

Derivata seconda. Per studiare convessità e concavità della funzione, calcoliamo la derivata seconda:

$$A''(I) = 0.1 \frac{-2(I+1) - (2I+1)}{(2I+1)^2(I+1)^2} = 0.1 \frac{-4I-3}{(2I+1)^2(I+1)^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo nel dominio. Il numeratore è positivo per $I < -3/4$. Pertanto in

$$(-\infty, -1)$$

la funzione è convessa, e in

$$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

è concava. Siccome $-3/4$ non è nel dominio, non ci sono punti di flesso.

Le informazioni raccolte sono riassunte nel grafico.

