Geometria e Topologia Differenziale

Primo compitino A.A. 2008/09

Da consegnare il 13 novembre 2008

Nome e Cognome:

---

1) Siano σ, $\tau\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$ due curve piane regolari tali che $\sigma(1) = \tau(1)$. Si assuma inoltre che $\sigma'(1)$ e $\tau'(1)$ non siano paralleli. Sotto queste ipotesi, dimostra che le curve σ_s e τ si intersecano per $|s|$ abbastanza piccolo, dove

$$\sigma_s(t) = \sigma(t) + (s, 0) \; .$$

2) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Se il supporto di σ è contenuto in una sfera e σ ha torsione costante a, dimostra che esistono $b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\kappa(s) = \frac{1}{b\cos(as) + c\sin(as)}$$

per ogni $s \in I$.

3) Sia $\sigma\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare chiusa C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e di curvatura $\kappa\colon [0,l] \to \mathbb{R}^+$. Supponi che esista una costante $c > 0$ tale che $0 \leq \kappa(s) \leq c$ per ogni $s \in [0,l]$ (quindi σ è meno incurvata di un cerchio di raggio $1/c$). Dimostra che

$$L(\sigma) \geq \frac{2\pi\rho(\sigma)}{c} \; ,$$

dove $L(\sigma)$ è la lunghezza di σ, e $\rho(\sigma)$ è l'indice di rotazione di σ.

4) Sia $\sigma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\sigma(t) = \big(2\cos t + \sin(3t), 2\sin t + \cos(3t)\big) \; .$$

Calcola l'indice di avvolgimento di σ rispetto al punto $p = (0,0)$.