Geometria e Topologia Differenziale

Primo compitino A.A. 2005/06 — 21 ottobre 2005

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\sigma\colon (\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\sigma(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right).$$

(i) Mostra che σ è una curva regolare.

(ii) Mostra che per ogni $t_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, la retta tangente R_{t_0} a σ in $\sigma(t_0)$ non è verticale, e la lunghezza del segmento di R_{t_0} tra $\sigma(t_0)$ e l'asse y è 1.

(iii) Mostra che per ogni $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ la curva σ ha lunghezza finita L_t tra $\frac{\pi}{2}$ e t, e si ha

$$\lim_{t \to \pi} L_t = +\infty.$$

(iv) Scrivi la riparametrizzazione

$$\tilde{\sigma}\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$$

di σ rispetto alla lunghezza d'arco a partire da $\frac{\pi}{2}$, e calcola la curvatura $\tilde{\kappa}(s)$ di $\tilde{\sigma}$.

(v) Sia $\eta\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare e p.r.l.a., tale che per ogni $s_0 \in I$ la retta tangente T_{s_0} a η in $\eta(s_0)$ non sia verticale, e tale che la lunghezza del segmento di T_{s_0} tra $\eta(s_0)$ e l'asse y sia 1. Mostra che, a meno di cambiamento d'orientazione e traslazione del parametro arco, esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che

$$\eta(s) = \pm\tilde{\sigma}(s) + (0, b)$$

oppure

$$\eta(s) = \pm\left(\tilde{\sigma}_1(s), -\tilde{\sigma}_2(s)\right) + (0, b),$$

dove $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ sono le componenti di $\tilde{\sigma}$.

(vi) Trova la curva $\alpha\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ biregolare, p.r.l.a., tale che

$$\alpha(\sqrt{2}\log 2) = \left(\frac{1}{2}, \log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}, \log 2 \right), \quad \mathbf{t}_\alpha(\sqrt{2}\log 2) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

e con curvatura e torsione

$$\kappa_\alpha(s) = \tau_\alpha(s) = \frac{1}{2\sqrt{e^{s\sqrt{2}} - 1}}.$$

2) Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, e scegliamo $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(p_0) = 0$ ma $\nabla f(p_0) \neq O$. Posto $C = f^{-1}(0)$, sappiamo che C nell'intorno di p_0 è il sostegno di una curva regolare $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e tale che $\sigma(0) = p_0$. Calcola l'espressione della curvatura di σ in p_0 in funzione delle derivate parziali di f in p_0.