ANNO ACCADEMICO 2014–15

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA

SECONDO COMPITINO — TESTO A

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

17 aprile 2015

Nome e cognome____

Matricola____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo "0.5" o "No" non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola la derivata della funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

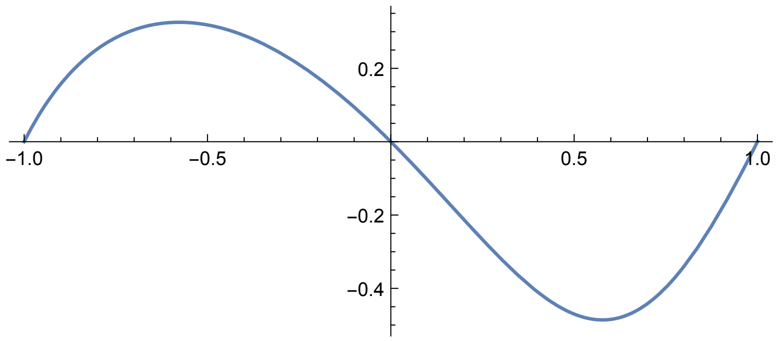
$$g(y) = \arctan\left(\frac{y^2-2}{y^4+4}\right) .$$

Esercizio 2. Calcola il valore del seguente integrale definito:

$$\int_{-1}^{2} 4t^3 - t^2 + 1\,dt .$$

Esercizio 3. Stabilisci (giustificando la risposta) quale delle funzioni seguenti può avere un grafico come quello in figura:

(a) $\log(x^2 + x + 1)$;
(b) $\log(x^3 - x + 1)$;
(c) $x^5 - x^3$;
(d) $x^3 - x + 1$.



SECONDA PARTE

Esercizio 4. Il metodo di datazione al carbonio presuppone che, in prima approssimazione, la relazione fra l'età T in anni di un oggetto di origine organica e il rapporto r fra il numero di isotopi di carbonio 14 e il numero di isotopi di carbonio 12 attualmente presenti nell'oggetto sia della forma

$$r = r_0 10^{-cT} , \tag{1}$$

dove r_0 indica il rapporto fra il numero di isotopi di carbonio 14 e il numero di isotopi di carbonio 12 presenti nell'atmosfera e $c > 0$ è un'opportuna costante legata alla emivita del carbonio 14. [In realtà questa relazione si basa sull'ipotesi troppo semplicistica che il rapporto r_0 sia costante nel tempo. I metodi contemporanei di datazione al carbonio tengono invece conto della variabilità nel tempo di r_0, con tecniche non rilevanti per questo esercizio.]

(i) Applicando il logaritmo in base 10 a entrambi i membri di (1) si ottiene una relazione fra T e $\log_{10} r$ della forma

$$T = q + m \log_{10} r , \tag{2}$$

dove $\log_{10}$ indica il logaritmo in base 10. Trova l'espressione di q e m in termini di c e $\log_{10} r_0$.

(ii) Nella tabella sottostante troverai i valori dell'età T e di $\log_{10} r$ misurati per alcuni oggetti. Usando il metodo dei minimi quadrati, determina i valori di q e m per cui la relazione (2) meglio interpola i dati.

(iii) L'approssimazione data dalla retta (2) così calcolata è buona?

(iv) Usando i valori che hai trovato, calcola l'età presunta di un oggetto con $r = 10^{-2}$.

(v) Tenendo presente che il valore di r può essere determinato con una precisione di al massimo tre cifre decimali, qual è l'età massima che può essere stimata con questo metodo?

Dati	$\log_{10} r$	T	$(\log_{10} r)^2$	$T \log_{10} r$	T^2
	-2.03	8000	4.1209	-16240	64000000
	-2.26	12000	5.1076	-27120	144000000
	-2.81	23000	7.8961	-64630	529000000
	-1.66	1000	2.7556	-1660	1000000
	-1.63	700	2.6569	-1141	490000
Medie	*-2.078*	*8940*	*4.507*	*-22158.2*	*147698000*

[*Suggerimento:* potrebbe servirti qualcuno dei seguenti conti: $2.078 \cdot 8940 \simeq 18577.32$; $8940^2 = 79923600$; $18912.8 \cdot 2.078 \simeq 39300.8$; $3580.88/0.189 \simeq 18912.8$; $2.078^2 \simeq 4.318$; $\sqrt{67774400} \simeq 8232.52$; $\sqrt{0.189} \simeq 0.435$; $\sqrt{22158.2} \simeq 148.856$; $18912.8 \cdot 8940 \simeq 169080432$; $\sqrt{147698000} \simeq 12153.106$; $3580.88/4.318 \simeq 829.29$; $\sqrt{2.078} \simeq 1.4415$; $8940 \cdot 4.507 \simeq 40292.58$; $3 \cdot 18912.8 \simeq 56738.4$; $0.435 \cdot 8232.52 \simeq 3582.2$; $2.078/8940 \simeq 0.0002$; $\sqrt{4.507} \simeq 2.123$; $8940/2.078 \simeq 4302.21$; $3580.88/3582.2 \simeq 0.9996$; $2 \cdot 18912.8 \simeq 37825.6$.]

Esercizio 5. Una ditta produttrice di imballaggi vuole produrre una scatola metallica formata da un cilindro di altezza h e raggio di base r, chiuso in basso da un disco piatto di raggio r e in alto da una semisfera sempre di raggio r. Questa scatola deve contenere un volume V_0 fissato. Mentre la produzione della base e della superficie laterale del cilindro è standard, la produzione della semisfera richiede tecniche più sofisticate per garantire la corretta curvatura della sfera. In particolare, mentre produrre la base o la superficie laterale del cilindro ha un costo per metro quadro pari a c_0 centesimi di euro, produrre la superficie della semisfera ha un costo per metro quadro pari a kc_0 centesimi di euro, con $k > 1$.

(i) Supponendo $k = 5/3$ e $V_0 = 3$ m^3, trova i valori di altezza h e raggio r che permettono di realizzare la scatola al costo minimo.
(ii) Trova qual è il più grande valore di r per cui è possibile costruire una scatola di questa forma di volume $V_0 = 3$ m^3.
(iii) Rispondi alla domanda (i) per $k > 1$ e $V_0 > 0$ qualsiasi.
(iv) Rispondi alla domanda (ii) per $V_0 > 0$ qualsiasi.

[*Suggerimento:* una sfera di raggio r ha volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ e superficie $4\pi r^2$. Un cilindro di altezza h e raggio di base r ha volume $\pi r^2 h$ e superficie laterale $2\pi rh$.]

Esercizio 6. Uno studio approfondito sui kiwi della Nuova Zelanda ha mostrato che la relazione fra il peso x di una femmina di kiwi e il peso $P(x)$ di un uovo da essa deposto, entrambi misurati in chilogrammi, è data dalla formula

$$P(x) = \frac{1}{10} \log \frac{1+x}{1+x^2} \, .$$

(i) Studia questa funzione, anche per $x < 0$. [*Suggerimento:* il polinomio $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3$ ha una sola radice $x_0 \simeq 1.29676$ nella semiretta $(-1, +\infty)$.]

(ii) Descrivi cosa questo modello suggerisce sulla relazione fra il peso di una femmina di kiwi e la sua capacità di deporre uova (esiste un peso ideale per la produzione di uova grandi? Cosa succede a femmine di kiwi particolarmente pesanti? Eccetera…)