ANNO ACCADEMICO 2015–16

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA

SECONDO COMPITINO — TESTO A

PROFF. MARCO ABATE E MARGHERITA LELLI-CHIESA

1 aprile 2016

Nome e cognome____

Corso di studio____

Matricola____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l’intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola la derivata della funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$g(z) = e^{\sin(1-z^2)} \ .$$

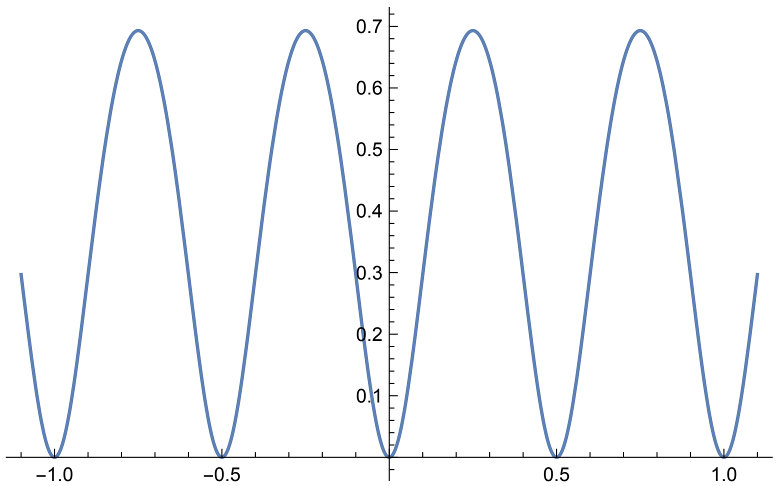
Esercizio 2. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(t) = \log[2 + \cos(4t)]$$

è periodica? Se pensi che lo sia, determina il periodo; se pensi che non lo sia spiega perché.

Esercizio 3. Stabilisci (giustificando la risposta) quale delle funzioni seguenti può avere un grafico come quello in figura:

(a) $\log[1 + \cos^2(2\pi x)]$;
(b) $1 + \log[\sin^2(2\pi x)]$;
(c) $\log[1 + \sin^2(2\pi x)]$;
(d) $\log[1 + \sin(2\pi x)]$.



SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio

(i) di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente, con $f(0) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$;

(ii) di una funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, tale che la retta tangente al suo grafico in $x_0 = 1$ abbia equazione $y = 6x - 4$;

(iii) di una funzione $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su tutto $\mathbb{R}$ e che abbia come insieme immagine l'intervallo aperto $(-2, 1)$.

Esercizio 5. Un'indagine ecologica ha studiato il legame fra la percentuale di falene *biston betularia* che nascono con pigmentazione scura invece che chiara nei boschi di betulle vicino a Manchester e la quantità di polveri sottili presenti nell'aria, misurata in microgrammi per metro cubo. I dati raccolti sono riassunti nella seguente tabella:

μg/m^3 di polveri	%
200	32
400	40
600	56
800	84

(i) Determina un modello matematico del legame fra le polveri sottili e la percentuale di falene scure trovando un polinomio di terzo grado

$$Q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

che interpoli esattamente i dati (cioè tale che $Q(200) = 32$, $Q(400) = 40$ e così via).

(ii) Secondo questo modello, qual è la percentuale di falene scure in assenza di polveri sottili?

(iii) Per quale intervallo di valori della variabile x ritieni che la funzione Q che hai trovato possa rappresentare realisticamente il fenomeno? [*Suggerimento:* l'equazione $x^3 + 2 \cdot 10^5 x + 336 \cdot 10^6 = 12 \cdot 10^8$ ha come unica soluzione reale $x_0 \simeq 882.58$.]

Esercizio 6. Sei a capo di una ditta che deve perforare un pozzo deviato che colleghi un punto di prelievo A in superficie con una risorsa petrolifera B che si trova a 8 chilometri di profondità e a 6 chilometri a ovest rispetto ad A. La conduttura deve passare attraverso un terreno che è costituito da una arenaria molto compatta per i primi 6 chilometri di profondità, e da una roccia più sabbiosa e meno compatta per gli ultimi 2 chilometri di profondità. Stendere la conduttura nella roccia arenacea costa 10 000 euro per chilometro; stenderla all'interno del composto sabbioso costa 5 000 euro per chilometro. L'attrezzatura a disposizione permette di scavare solo in linea retta, eventualmente cambiando direzione una volta raggiunta la profondità voluta. Decidi quindi di scavare in linea retta da A fino a un punto P che si trova sul segmento orizzontale che congiunge B al punto C posto a 8 chilometri di profondità esattamente sotto A, e poi di scavare orizzontalmente da P fino a B.

(i) Indicando con $x \in [0, 6]$ la distanza in chilometri fra P e B, determina il costo $C(x)$ della costruzione della conduttura da A a P a B. [*Suggerimento:* può essere utile il teorema di Talete che implica che una retta parallela a un lato di un triangolo taglia gli altri due lati in segmenti proporzionali.]

(ii) Trova il valore di x per cui il costo $C(x)$ è minimo.

(iii) Risolvi lo stesso problema supponendo che stendere la conduttura nel composto sabbioso costi 8 000 euro per chilometro.