ANNO ACCADEMICO 2017–18

SCIENZE GEOLOGICHE E *SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI*

MATEMATICA

TERZO COMPITINO — TESTO A

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

28 Maggio 2018

Nome e cognome____

Matricola____

Corso di laurea____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo "0.5" o "No" non saranno valutate anche se giuste.

Il compitino consiste di due parti. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). Una volta superata la prima parte, perché il compitino sia sufficiente occorre che ne sia stato risolto correttamente almeno metà, comprendendo sia la prima sia la seconda parte.

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Trova due numeri reali a e b tali che la funzione $f(x) = \sin(a \cdot x + b)$ abbia un punto di massimo per $x = 0$ ed un punto di minimo per $x = 1$.

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 x\, e^x \, dx.$$

Esercizio 3. Trova il valore della costante $k > 0$ tale che la funzione e^{kt^2} soddisfi l'equazione differenziale:

$$y'' = 6y(1 + 6t^2).$$

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Una popolazione di virus si evolve secondo la legge

$$V(t) = \frac{200\, e^{\frac{t}{2}+2}}{t^2 + 8t + 12},$$

dove $V(t)$ è il numero di virus presenti al tempo t (misurato in giorni).

a) Studia la funzione V arrivando a disegnarne un grafico approssimato considerando anche valori di $t < 0$.

b) In quale istante $t^* > 0$ la popolazione raggiunge il numero minimo di individui?

Esercizio 5. Due palloni identici, p_1 ed p_2, inizialmente sgonfi (tempo $t = 0$) vengono gonfiati da due compressori diversi con potenza variabile nel tempo. Al tempo $t \in [0, 5]$, dal compressore del pallone p_1 escono $a_1(t) = 5\,t - t^2$ metri cubi di aria al minuto, mentre dal compressore del pallone p_2 escono $a_2(t) = 5\,t^2 - t^3$ metri cubi di aria al minuto. Dopo 5 minuti, i compressori vengono spenti, cioè $a_1(5) = a_2(5) = 0$. Determina:

a) quanti litri di aria sono presenti nei due palloni allo spegnimento dei compressori;

b) dopo quanti minuti il volume d'aria nel pallone p_2 supera il volume d'aria nel pallone p_1. [*Suggerimento:* considera che l'equazione $x^2 - 8x + 10 = 0$ ha due soluzioni reali $x_1 \approx 1.6$ e $x_2 \approx 6.4$].

Esercizio 6. In un alveare si trova una popolazione di 100 api al tempo $t = 0$. A causa di un' epidemia, la popolazione decresce secondo l'equazione

$$N' = -4t^3 \cdot N,$$

dove $N(t)$ indica il numero di api presenti al tempo t (misurato in anni); in particolare, $N(0) = 100$.

a) Risolvi l'equazione differenziale data trovando una espressione esplicita per $N(t)$.
b) Trova l'istante t^* in cui la popolazione si è dimezzata.