

ANNO ACCADEMICO 2016–17

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

**MATEMATICA**

**TERZO COMPITINO — TESTO A**

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

**30 Maggio 2017**

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

Corso di laurea \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Il compitino consiste di due parti. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). Una volta superata la prima parte, perché il compitino sia sufficiente occorre che ne sia stato risolto correttamente almeno metà, comprendendo sia la prima sia la seconda parte.

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Trova l'intervallo della retta reale in cui la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , data da

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1,$$

è concava.

**Esercizio 2.** Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2 + \pi) dx.$$

**Esercizio 3.** Trova il valore della costante  $k > 0$  tale che la funzione  $\sin(kt)$  soddisfi l'equazione differenziale:

$$y'' = -4y.$$

## SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Una popolazione di batteri cresce secondo la legge

$$N(t) = \frac{t}{1 - e^{-t-1}},$$

dove  $N(t)$  è il numero di batteri presenti al tempo  $t$ .

- a) Studia la funzione  $N(t)$  arrivando a disegnarne un grafico approssimato considerando anche valori di  $t < 0$ . [Nota che  $\forall x \in \mathbb{R}$  si ha  $e^x > x$ ].
- b) Per valori di  $t$  sufficientemente grandi, la crescita di  $N(t)$  è lineare, quadratica oppure esponenziale?

**Esercizio 5.** Gara automobilistica: due vetture,  $a_1$  ed  $a_2$ , percorrono un rettilineo su due corsie parallele, partendo da ferme dalla linea di partenza. La velocità di  $a_1$  in funzione del tempo è data da  $v_1(t) = 10t - t^2$  (m/sec), la velocità di  $a_2$  è  $v_2(t) = 10t^2 - t^3$  (m/sec). Dopo 10 secondi, entrambe le auto sono ferme ( $v_1(10) = v_2(10) = 0$ ). Determina:

- a) lo spazio percorso da  $a_1$  ed  $a_2$  nei 10 secondi di gara.
- b) la velocità media tenuta da  $a_1$  ed  $a_2$  nei 10 secondi.
- c) l'istante in cui  $a_2$  supera  $a_1$ . [Considera che  $\sqrt{19} \approx 4.36$ ].

**Esercizio 6.** Una popolazione di pinguini consiste di 100 individui al tempo  $t = 0$  ( $N(0) = 100$ ). A causa di un' epidemia, la popolazione decresce secondo l'equazione

$$N' = -N^2 - 25,$$

dove  $N = N(t)$  indica il numero di individui presenti al tempo  $t$  (misurato in anni).

- a) Risolvi l'equazione differenziale data trovando una espressione esplicita per  $N(t)$ .
- b) Trova l'istante  $t^* \in (0, 0.5)$  in cui la popolazione si estingue, cioè quando  $N(t^*) = 0$ . [Considera che  $\arctan(20) \approx 1.5$ ].