Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quarto scritto A.A. 2010/11 — 29 giugno 2011

Nome e Cognome:

---

1) Sia M una varietà. Dimostra che su M esiste una quantità più che numerabile di strutture differenziali distinte (come strutture differenziabili; possono essere anche diffeomorfe fra di loro, non è importante) che inducono la stessa topologia. [*Suggerimento:* comincia costruendo un omeomorfismo di B^n in sé di classe C^∞ che sia un diffeomorfismo ovunque tranne nell'origine.]

2) Diremo che un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$ è *orientabile* se per ogni atlante di M che banalizza E è possibile scegliere delle banalizzazioni in modo che le funzioni di transizione abbiano tutte determinante positivo.

Dimostra che lo spazio totale di un fibrato vettoriale orientabile su una varietà orientabile è orientabile (come varietà).

3) In questo esercizio useremo la convenzione di Einstein sulla somma sugli indici ripetuti. Sia ∇ una connessione lineare su una n-varietà M. Dato un riferimento locale $\{E_1, \ldots, E_n\}$ su un aperto $U \subseteq M$, per $i, j = 1, \ldots, n$ definiamo $\omega^i_j: \mathcal{T}(U) \to C^\infty(U)$ ponendo

$$\forall X \in \mathcal{T}(U) \qquad \nabla_X E_j = \omega^i_j(X) E_i \ .$$

(i) Dimostra che le ω^i_j sono delle 1-forme su U, dette *forme di connessione.*

(ii) Se τ è la torsione di ∇, per $i = 1, \ldots, n$ definiamo $\tau^i: \mathcal{T}(U) \times \mathcal{T}(U) \to C^\infty(U)$ ponendo

$$\forall X, Y \in \mathcal{T}(U) \qquad \tau(X, Y) = \tau^i(X, Y) E_i \ .$$

Dimostra che le τ^i sono delle 2-forme su U, dette *forme di torsione.*

(iii) Indicato con $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ il riferimento di T^*M duale a $\{E_1, \ldots, E_n\}$, dimostra la *prima equazione di struttura di Cartan:*

$$d\varphi^i = \varphi^j \wedge \omega^i_j + \tau^i \ .$$

(iv) Se R è il tensore di curvatura di ∇, per $i, j = 1, \ldots, n$ definiamo $\Omega^i_j: \mathcal{T}(U) \times \mathcal{T}(U) \to C^\infty(U)$ ponendo

$$\forall X, Y \in \mathcal{T}(U) \qquad R_{XY} E_j = \Omega^i_j(X, Y) E_i \ .$$

Dimostra che le Ω^i_j sono delle 2-forme su U, dette *forme di curvatura,* e dimostra la *seconda equazione di struttura di Cartan:*

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k \ .$$