Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Secondo scritto A.A. 2010/11 — 6 febbraio 2012

Nome e Cognome:

---

1) Sia $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ data da

$$F(\theta, \phi, \psi) = \big(2 + \cos\phi) \cos\theta, (2 + \cos\phi) \sin\theta, \sin\phi + \sin\psi, \sin\phi - \sin\psi, \cos\psi\big) \,.$$

(i) Dimostra che F è un'immersione che induce un embedding del toro T^3 in $\mathbb{R}^5$. Denota poi con V l'immagine di tale embedding.

(ii) Per ogni $p \in V$, identifica lo spazio tangente T_pV con il sottospazio H_p di $\mathbb{R}^5$ dato da

$$H_p = di_p(T_pV) \subseteq T_p\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^5 \,,$$

dove $i: V \to \mathbb{R}^5$ è l'inclusione. Sia ora K_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di equazioni cartesiane $x_1 = x_3 - x_4 = 0$; determina i punti $p \in V$ tali che $H_p = K_1$.

2) Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r su una n-varietà M, e poniamo

$$A^k_{cv}(E) = \{\omega \in A^k(E) \mid \mathrm{supp}(\omega) \cap E_p \text{ è compatto in } E_p \text{ per ogni } p \in M\} \,.$$

(i) Dimostra che $\big(A^\bullet_{cv}(E), d\big)$ è un complesso differenziale. La sua coomologia $H^\bullet_{cv}(E)$ è detta *coomologia a supporto compatto verticale.*

Supponiamo ora che E sia *orientato*, per cui esiste un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ che banalizza E tale che le funzioni di transizione delle banalizzazioni χ_α abbiano tutte determinante positivo. Indichiamo con (x_α, v_α) le coordinate locali su $\pi^{-1}(U_\alpha)$ indotte da χ_α.

(ii) Sia $\omega \in A^{k+r}_{cv}(E)$. Dimostra che $\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ può essere scritta come somma di forme del tipo

$$f_\alpha(\pi^*\phi_\alpha) \wedge dv_\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge dv_\alpha^{i_s}$$

con $s = 0, \ldots, r$, $f_\alpha \in C^\infty\big(\pi^{-1}(U_\alpha)\big)$ e $\phi_\alpha \in A^{k+r-s}(U_\alpha)$ per $s = 0, \ldots, r$.

(iii) Dimostra che ponendo

$$\pi_\#\big(f_\alpha(\pi^*\phi_\alpha) \wedge dv_\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge dv_\alpha^{i_s}\big) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < r, \\ \left[\int_{\mathbb{R}^r} f_\alpha(x_\alpha, v_\alpha)\, dv_\alpha^1 \cdots dv_\alpha^r\right] \phi_\alpha & \text{se } s = r \end{cases}$$

risulta ben definito un morfismo $\pi_\#: A^\bullet_{cv}(E) \to A^{\bullet - r}(M)$.

(iv) Dimostra che $\pi_\#$ commuta col differenziale esterno, per cui induce un morfismo $\pi_*: H^\bullet_{cv}(E) \to H^{\bullet-r}(M)$ detto di *integrazione lungo le fibre.*

3) Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, e $\sigma: I \to M$ una curva liscia.

(i) Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) esiste un diffeomorfismo $h: J \to I$ tale che $\sigma \circ h$ è una geodetica per ∇;
  (b) si ha $D_t\sigma' = g(t)\sigma'(t)$ per qualche funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Se $\tilde{\nabla}$ è un'altra connessione lineare su M, dimostra che $B = \tilde{\nabla} - \nabla \in \mathcal{T}^1_2(M)$.

(iii) Supponi che esista una 1-forma $\varphi \in A^1(M)$ tale che $B(v, v) = 2\varphi(v)v$ per ogni $v \in TM$. Dimostra che allora per ogni curva $\sigma: I \to M$ che è una geodetica per ∇ esiste un diffeomorfismo $h: J \to I$ tale che $\sigma \circ h$ sia una geodetica per $\tilde{\nabla}$.