Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Primo scritto A.A. 2015/16 — 13 giugno 2016

Nome e Cognome:

---

1) Un'*algebra di divisione* su un campo $\mathbb{K}$ è un'algebra D il cui prodotto $\cdot$ non è necessariamente associativo o commutativo ma soddisfa la seguente proprietà: per ogni $a \in D$ e ogni $b \in D \setminus \{O\}$ esistono un unico $x \in D$ tale che $a = b \cdot x$ e un unico $y \in D$ tale che $a = y \cdot b$.

Supponiamo di aver definito un prodotto $\cdot \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che rende $\mathbb{R}^n$ un'algebra di divisione su $\mathbb{R}$ [*Nota:* questo si può fare se e solo se $n = 1$, 2, 4 o 8], e per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ sia $\mu_v \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $\mu_v(p) = p \cdot v$. Infine, indicheremo con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Dimostra che:

(i) $\mu_O \equiv O$ e che μ_v è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ con se stesso per ogni $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$;
(ii) per ogni $p \in S^{n-1}$ esiste un unico $a_p \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ tale che $p = a_p \cdot e_1$, e l'applicazione $p \mapsto a_p$ è di classe C^∞;
(iii) per ogni $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ i vettori $\{a \cdot e_1, \ldots, a \cdot e_n\}$ sono linearmente indipendenti;
(iv) se $p \in S^{n-1}$ allora i vettori $\{\pi_p(a_p \cdot e_2), \ldots, \pi_p(a_p \cdot e_n)\}$ sono linearmente indipendenti, dove abbiamo indicato con $\pi_p \colon \mathbb{R}^n \to T_p S^{n-1}$ la proiezione ortogonale;
(v) TS^{n-1} è banale.

2) Sia M una n-varietà connessa.

(i) Dimostra che una 1-forma chiusa $\omega \in Z^1(M)$ è esatta se e solo se

$$\int_{[0,1]} \sigma^* \omega = 0$$

per ogni curva chiusa C^∞ a tratti $\sigma \colon [0,1] \to M$. [*Suggerimento:* puoi dare per noto che in una varietà connessa due punti qualsiasi possono essere collegati da una curva C^∞.]
(ii) Dimostra che se M è semplicemente connessa allora $H^1(M) = (O)$. [*Suggerimento:* puoi dare per noto il fatto che se esiste un'omotopia continua fra due curve che sono C^∞ a tratti allora esiste anche un'omotopia C^∞ a tratti fra le due curve. Inoltre per quel che riguarda l'integrazione puoi trattare gli oggetti C^∞ a tratti come fossero C^∞, in quanto i punti in cui si perde la differenziabilità hanno misura nulla.]

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana orientata di dimensione n, e $\sigma \colon I \to M$ una curva liscia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con $0 \in I$. Supponiamo che per ogni $t \in I$ i vettori $\{\sigma'(t), D_t\sigma', \ldots, D_t^{n-2}\sigma'\} \subset T_{\sigma(t)}M$ siano linearmente indipendenti (dove D^k indica l'iterata k-esima della derivata covariante lungo σ indotta dalla connessione di Levi-Civita); siano $\mathbf{t}_1(t), \ldots, \mathbf{t}_{n-1}(t) \in T_{\sigma(t)}M$ ottenuti applicando a questi vettori il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, e indichiamo con $\mathbf{t}_n(t) \in T_{\sigma(t)}M$ l'unico vettore di lunghezza unitaria tale che $\{\mathbf{t}_1(t), \ldots, \mathbf{t}_n(t)\}$ sia una base ortonormale positiva di $T_{\sigma(t)}M$. Infine, per $\delta, \varepsilon > 0$ abbastanza piccoli sia $F \colon (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)^{n-2} \to M$ data da

$$F(t, s_1, \ldots, s_{n-2}) = \exp_{\sigma(t)}\bigl(s_1 \mathbf{t}_3(t) + \cdots + s_{n-2} \mathbf{t}_n(t)\bigr) .$$

(i) Dimostra che se δ ed ε sono abbastanza piccoli allora l'immagine F è un'ipersuperficie embedded S di M. [*Suggerimento:* puoi dare per nota l'esistenza di intorni uniformemente normali.]
(ii) Dimostra che $\sigma|_{(-\delta,\delta)}$ è una geodetica di S rispetto alla metrica di S indotta dalla metrica Riemanniana di M. [*Suggerimento:* ricorda la relazione fra la connessione di Levi-Civita di S e la connessione di Levi-Civita di M.]