

ANNO ACCADEMICO 2018–19

SCIENZE GEOLOGICHE

**MATEMATICA**

**QUARTO SCRITTO — TESTO A**

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

**17 gennaio 2020**

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Calcola il dominio e la derivata delle funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 1}{4 - x^2}\right)$$

**Esercizio 2.** Calcola il seguente integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin(x^2 - \pi) dx.$$

**Esercizio 3.** Calcola il valore della costante  $k$  in modo che  $f_X(x) = kx^3$  sia la funzione densità di probabilità di una variabile continua  $X$  definita sull'intervallo  $[0, 1]$ . Calcola poi il valore atteso di  $X$ .

SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Trova un esempio di:

- 1) una funzione  $f_1$  continua e decrescente su tutto  $\mathbb{R}$ , per cui sia anche vero che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 2$ ;
- 2) una funzione quadratica  $f_2$  il cui grafico sia tangente alla retta  $y = -2x$  nel punto  $(1, -2)$ ;
- 3) una funzione  $f_3$  polinomiale di grado 3 con un punto di massimo in  $x = 0$  e un punto di minimo in  $x = 1$ .

**Esercizio 5.** In un tratto autostradale, viaggiano 2 tipi di veicoli: auto per  $\frac{3}{5}$  e camion per i restanti  $\frac{2}{5}$ . Tra tutti i veicoli circolanti, solo  $\frac{2}{3}$  hanno le catene a bordo, con  $\frac{3}{4}$  dei veicoli senza catene che sono auto.

- 1) In galleria si forma una fila di 10 veicoli. Esprimi la probabilità che tra questi esattamente 3 siano auto.
- 2) Calcola la probabilità che un'auto fermata a caso da una pattuglia della polizia abbia le catene a disposizione.
- 3) Comincia a nevicare e i veicoli senza catene rimangono bloccati lungo la strada. La pattuglia della polizia comincia a prestare soccorso uno dopo l'altro agli sventurati rimasti fermi. Calcola la probabilità che fra i primi due veicoli soccorsi ci sia almeno un auto.

**Esercizio 6.** Una pentola di acqua viene mantenuta alla temperatura costante di  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  sopra a un fornello. Un tortellino preso dal frigo, inizialmente alla temperatura di  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , viene immerso nella pentola all'istante  $t = 0$ . Da quel momento, la temperatura  $T(t)$  del tortellino al tempo  $t$  cresce nel tempo secondo la legge

$$T' = \frac{t}{2}(80 - T) .$$

- 1) Trova esplicitamente la funzione che descrive la temperatura  $T(t)$  del tortellino al tempo  $t \geq 0$  e tracciane il grafico.
- 2) Per  $t$  vicino a  $0$ , la funzione  $T(t)$  ha una crescita quadratica. Usando lo sviluppo di Taylor, trova la funzione quadratica che meglio approssima la funzione  $T$  per  $t \approx 0$ .