

ANNO ACCADEMICO 2014–15
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
QUARTO SCRITTO

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

18 gennaio 2016

Nome e cognome _____

Matricola _____

Corso di laurea _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola la derivata della funzione

$$f(t) = \log \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}.$$

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int (x^2 + 1) \sin x \, dx.$$

Esercizio 3. Esiste un $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema

$$\begin{cases} kx + 3y = 3, \\ x + 2y = -2, \end{cases}$$

ammette soluzione? Se pensi che la risposta sia affermativa, indica tutti i valori di k per cui il sistema ha soluzione, e descrivi le soluzioni; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio

- (i) di una funzione f definita e continua su tutto \mathbb{R} , periodica di periodo 6, e che abbia come insieme immagine l'intervallo $[-3, 1]$;
- (ii) di una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decrescente, con $f(0) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$;
- (iii) di una funzione h dispari, definita e continua su tutto \mathbb{R} , tale che la retta tangente al suo grafico in $x = 0$ abbia equazione $y = x$.

Esercizio 5. Per studiare le proprietà elettriche di una roccia sedimentaria, gli applichi un campo elettromagnetico per poi interromperlo improvvisamente. L'intensità I della corrente indotta nella roccia dipende dal tempo $t > 0$ passato dal momento dell'interruzione secondo la legge

$$I(t) = \log \left(1 + \frac{a}{t^2} \right),$$

dove $a > 0$ è una costante che dipende dalle proprietà elettriche della roccia in esame.

- (i) Studia la funzione I (anche per tempi negativi) nel caso $a = 2$.
- (ii) L'obiettivo del tuo esperimento è recuperare il valore della costante a partendo dal grafico della funzione I misurata nella specifica roccia in esame, e per farlo misuri la pendenza al tempo $t = 1$ del grafico ottenuto dall'esperimento. Se la pendenza al tempo $t = 1$ è pari a $-8/5$, quanto vale a ?

Esercizio 6. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e in tal caso trova le soluzioni) il sistema lineare:

$$\begin{cases} -3x + z = 2a, \\ ax + y = 2 + a, \\ -ax + ay = 0. \end{cases}$$