

ANNO ACCADEMICO 2016–17
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
QUINTO SCRITTO

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

13 febbraio 2018

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\sin^2(x)}.$$

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_1^e \frac{x+1}{x} dx.$$

Esercizio 3. Trova un vettore di lunghezza 2 ortogonale al piano di equazione cartesiana $3x - y + \sqrt{6}z = 2$. Quanti ce ne sono? Motiva la risposta.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio di:

- (i) una funzione f_1 definita su $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e che abbia le rette $x = 0$ ed $x = 1$ come asintoti verticali;
- (ii) una funzione f_2 definita su tutto \mathbb{R} tale che la sua immagine sia l'intervallo $(0, 1]$.
- (iii) una funzione f_3 continua, con dominio tutto \mathbb{R} e tale che l'equazione $f_3(x) = 1$ sia soddisfatta se e soltanto se x è un numero intero multiplo di 5.

4 Nome e cognome _____ Matricola _____

Esercizio 5. Una barra di rame è riscaldata mantenendo un estremo Q_0 alla temperatura ambiente di 15°C e ponendo l'altro estremo Q_4 in un forno a una temperatura di 300°C . Calcola la temperatura dei punti Q_1 , Q_2 e Q_3 della barra sapendo che la temperatura del punto Q_j è pari a un terzo della somma delle temperature dei punti Q_{j-1} e Q_{j+1} per $j = 1, 2, 3$.

Esercizio 6. Una popolazione di batteri cresce secondo il modello

$$B(t) = k e^{at+bt^2},$$

dove $k, a, b \in \mathbb{R}$ sono parametri del modello e $B(t)$ denota il numero di batteri presenti al tempo t , misurato in giorni. In un esperimento del tuo laboratorio, la popolazione conta $B(0) = 10^5$ individui al tempo $t = 0$ e cresce secondo l'equazione differenziale

$$B'(t) = (2 - 2t) B(t).$$

- (i) Determina per quali valori di k, a e b il modello descrive la crescita della popolazione di batteri osservata durante l'esperimento.
- (ii) Per tali valori, studia la funzione B con $t \geq 0$.
- (iii) L'apparecchiatura del tuo laboratorio è in grado di gestire contemporaneamente al massimo $2 \cdot 10^5$ batteri. Secondo le previsioni, l'esperimento dovrebbe durare una settimana. Sarai in grado di portare a termine l'esperimento o dovrai interromperlo prima?