

ANNO ACCADEMICO 2017-18
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
TERZO SCRITTO

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

10 Settembre 2018

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola il dominio e la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\log(x^2 - 1)}.$$

Esercizio 2. Sia n un intero positivo. Trova una formula che in funzione di n esprima il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^1 x^{n-1} (1 - x^n)^n dx.$$

Esercizio 3. Trova un vettore di lunghezza 4 ortogonale al piano di equazione cartesiana $2x + y + 2z = 0$. Quanti vettori esistono che soddisfano queste condizioni?

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio di:

- (i) una funzione f_1 definita e continua su tutto \mathbb{R} avente esattamente due punti di minimo ed esattamente un punto di massimo.
- (ii) una funzione f_2 definita su tutto \mathbb{R} tale che la sua immagine sia l'intervallo $[-2, 3]$.
- (iii) una funzione f_3 definita e continua su tutto \mathbb{R} che non sia iniettiva quando ristretta all'intervallo $[0, +\infty)$.

Esercizio 5. Hai commissionato a due professionisti esterni, un geologo e un ingegnere, lo studio di un potenziale giacimento minerario da cui speri di poter estrarre argento e bismuto, immersi in un conglomerato metamorfosato.

Lo studio del geologo propone le seguenti conclusioni:

- la percentuale di bismuto presente nel giacimento è doppia rispetto alla percentuale di argento;
- la percentuale di conglomerato è pari alla percentuale di argento sommata al doppio della percentuale di bismuto;
- nel giacimento non sono presenti altre sostanze oltre all'argento, al bismuto e al conglomerato.

Lo studio dell'ingegnere invece porta alle seguenti conclusioni:

- la percentuale di argento presente nel giacimento è un terzo della percentuale di bismuto;
- la somma della percentuale di bismuto e del doppio della percentuale di conglomerato è pari a $5/3$ della percentuale di argento;
- nel giacimento non sono presenti altre sostanze oltre all'argento, al bismuto e al conglomerato.

Le conclusioni di uno di questi due studi sono irrealistiche. Identifica quale dei due studi non è accettabile, spiega perché, e calcola le percentuali di argento, bismuto e conglomerato metamorfosato presenti nel giacimento secondo l'altro studio.

Esercizio 6. Un corpo si muove verticalmente oscillando rispetto ad un punto fissato O . All'istante $t = 0$ sec. il corpo si trova 1 cm sopra ad O . Per $t \geq 0$ l'oscillazione del corpo rispetto al punto O è descritta dalla funzione

$$y(t) = e^t \cos(t),$$

dove $|y(t)|$ misura in cm la distanza al tempo t del corpo dal punto O mentre il segno di $y(t)$ determina se il corpo si trova sopra ($y(t) > 0$) o sotto ($y(t) < 0$) il punto O .

- (i) Studia la funzione $y: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ per $t \in [0, 2\pi]$, arrivando a tracciarne un grafico approssimato.
- (ii) In quale istante $t^* \in [0, 2\pi]$ il corpo si trova alla massima distanza sotto al punto O ?