

ANNO ACCADEMICO 2018–19  
SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI  
**MATEMATICA**  
SECONDO SCRITTO — TESTO A  
PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

15 luglio 2019

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

## PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Calcola il dominio e la derivata delle funzione  $f(x) = \log(1 - x^2)$ .

**Esercizio 2.** Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx.$$

**Esercizio 3.** Siano  $r$  e  $\hat{r}_\alpha$  due rette nello spazio di equazione parametrica rispettivamente

$$r : \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 0 \end{cases} + t \begin{cases} 2 \\ -2 \\ 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \hat{r}_\alpha : \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 1 \end{cases} + s \begin{cases} -1 \\ 1 \\ \alpha \end{cases},$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  è un parametro. Determina per quali valori di  $\alpha$ , se esistono, le rette  $r$  e  $\hat{r}_\alpha$  non sono sghembe.

## SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Trova un esempio di:

- 1) una funzione  $f_1$  tale che  $f_1(x) = 1$  se e solo se  $x$  è un intero pari, cioè se e solo se  $x = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ ;
- 2) una funzione  $f_2$  continua e decrescente su tutto  $\mathbb{R}$  per cui sia anche vero che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 2$ ;
- 3) una funzione  $f_3$  il cui grafico sia tangente al grafico della funzione  $g(x) = x^2$  nel punto  $(1, 1)$  e tale che  $f_3(1/2) = -1$ .

**Esercizio 5.** Al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e per quei valori trova le soluzioni) il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + (k - 1)y + z = 3 - k , \\ x + y + (k - 1)z = 1 , \\ kx + (2k - 2)y + 2z = 4 - k , \\ 2x + ky + kz = k . \end{cases}$$

**Esercizio 6.** Per un fissato valore  $k$ , considera la parabola  $p_k$  di equazione

$$p_k : y = x^2 - k.$$

- 1) Al variare di  $k > 0$ , determina l'ordinata dei punti (o del punto) del grafico di  $p_k$  che hanno distanza minima dall'origine degli assi. [*Suggerimento:* potrebbe essere utile distinguere fra il caso  $0 < k < 1/2$  e il caso  $k \geq 1/2$ .]
- 2) Indichiamo con  $d_k(x)$  la distanza tra il punto su  $p_k$  di ascissa  $x$  e l'origine degli assi. Studia la funzione  $d_k$  per  $k = 1/4$ , arrivando a disegnarne il grafico.
- 3) Stessa domanda del punto precedente per  $k = 1$ .