ANNO ACCADEMICO 2018–19

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA

SECONDO SCRITTO — TESTO B

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

15 luglio 2019

Nome e cognome____

Matricola____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo "0.5" o "No" non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola il dominio e la derivata delle funzione $f(x) = \log(4 - x^2)$.

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito

$$\int_0^2 \sqrt{2x+1}\, dx.$$

Esercizio 3. Siano r e $\tilde{r}_k$ due rette nello spazio di equazione parametrica rispettivamente

$$r : \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{r}_k : \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} -2 \\ k \\ 2 \end{vmatrix} \, ,$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro. Determina per quali valori di k, se esistono, le rette r e $\tilde{r}_k$ *non* sono sghembe.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio di:

1) una funzione f_1 tale che $f_1(x) = 1$ se e solo se x è un intero dispari, cioè se e solo se $x =, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots;$
2) una funzione f_2 continua e crescente su tutto $\mathbb{R}$ per cui sia anche vero che $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = 2;$
3) una funzione f_3 il cui grafico sia tangente al grafico della funzione $g(x) = x^2$ nel punto $(-1, 1)$ e tale che $f_3(-1/2) = -1$.

Esercizio 5. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e per quei valori trova le soluzioni) il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + (\alpha - 1)z = 3 - \alpha \ , \\ 2x + \alpha y + \alpha z = \alpha \ , \\ \alpha x + 2y + (2\alpha - 2)z = 4 - \alpha \ , \\ x + (\alpha - 1)y + z = 1 \ . \end{cases}$$

Esercizio 6. Per un fissato valore k, considera la parabola q_k di equazione

$$q_k : y = k - x^2.$$

1) Al variare di $k > 0$, determina l'ordinata dei punti (o del punto) del grafico di q_k che hanno distanza minima dall'origine degli assi. [*Suggerimento:* potrebbe essere utile distinguere fra il caso $0 < k < 1/2$ e il caso $k \geq 1/2$.]
2) Indichiamo con $d_k(x)$ la distanza tra il punto su q_k di ascissa x e l'origine degli assi. Studia la funzione d_k per $k = 1/3$, arrivando a disegnarne il grafico.
3) Stessa domanda del punto precedente per $k = 2$.