

ANNO ACCADEMICO 2018–19  
SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI  
**MATEMATICA**  
**QUINTO SCRITTO — TESTO A**  
PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

**10 febbraio 2020**

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Calcola il dominio e la derivata delle funzione

$$f(x) = \log \left( \frac{x-1}{2-x} \right).$$

**Esercizio 2.** Calcola il seguente integrale definito

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{10} dx.$$

**Esercizio 3.** Può esistere una matrice  $3 \times 4$  di rango 1? Se pensi sia impossibile spiega perché; se pensi sia possibile trova un esempio.

## SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Trova un esempio di:

- 1) una funzione  $f_1$  continua su tutto  $\mathbb{R}$  per cui si abbia  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 3$ ;
- 2) una funzione quadratica  $f_2$  il cui grafico sia tangente alla retta  $y = x$  nel punto  $(1, 1)$ ;
- 3) una funzione  $f_3$  continua su tutto  $\mathbb{R}$  con  $x = 0$  e  $x = 1$  come punti di massimo globale.

**Esercizio 5.** Sia data la retta  $r$  di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 + 2t , \\ y = -1 - 6t , \\ z = 4t . \end{cases}$$

- 1) Il punto  $A = (0, -1, 0)$  appartiene alla retta? Motiva la risposta.
- 2) Scrivi un'equazione cartesiana del piano  $\alpha$  passante per il punto  $B = (1, -2, 1)$  e perpendicolare alla retta  $r$ .
- 3) Trova le coordinate del punto  $P$  intersezione del piano  $\alpha$  con la retta  $r$ .

**Esercizio 6.** Una popolazione di anguille evolve nel tempo secondo il modello

$$A(t) = k_1 e^{k_2 t - t^2},$$

dove  $k_1$  e  $k_2$  sono due costanti e  $A(t)$  fornisce il numero di anguille al tempo  $t$ . Sappiamo che  $A(0) = 10$ . Inoltre, vale la seguente relazione differenziale

$$A' = A \cdot (1 - 2t),$$

che lega la funzione  $A$  alla sua derivata prima  $A'$ .

- 1) Trova il valore delle costanti  $k_1$  e  $k_2$ .
- 2) Studia la funzione  $A$ , arrivando a tracciarne il grafico.