Analisi Matematica I - Ing. Meccanica
Esame del 12.1.2024

cognome	nome	matr.	scritto	voto	finale
Baracchini	Tommaso	645763	6,5	**12,0**	
Barrasso	Vittorio	660149	9,5	**19,2**	
Bartalini	Marco	635796	6,5	**12,0**	
Galassi	Davide	655819	7,0	**13,2**	
Pucci	Davide	660125	6,5	**12,0**	

NON AMMESSI

Lungaro	Mattia	655979	6
Coccagno	Domenico	659334	5
Politi	Alessandro	655005	5
Franceschini	Matteo Giac	635387	4
Zicca	Leonardo	681827	4
Politi	Nicola	655185	3,5
Romani	Luca	655107	3,5
Lopez Camayo	Alexander	661421	2
Macii	Alessandro	607470	1

cognome nome matr.

Analisi Matematica I - Ingegneria Meccanica
Esame Scritto del 12/01/2024

1. Scrivere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa

$$z^2 - 4z + i + 4 = 0.$$

$z = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\big(\log(\tan x)\big) \qquad \text{con } x \in [0, 2\pi].$$

$]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{e^{\sin x} - \cos x}.$$

0

4. Determinare il valore minimo della funzione

$$f(x) = x^2 - 2\log x.$$

1

5. Determinare le regioni in cui risulta decrescente la funzione

$$f(x) = e^x (x-2)^2.$$

$0 \leq x \leq 2$

6. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log(1+x) = e^x - 1.$$

1

7. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 5}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

$\frac{2+3\pi}{4}$

8. Determinare le regioni in cui risulta convessa la funzione

$$f(x) = \arctan(x^2).$$

$|x| \leq 3^{1/4}$

9. Tra gli integrali impropri seguenti indicare quelli che risultano convergenti:

$$\int_1^2 \frac{(\log x)^{2/3}}{x(x-1)}\, dx; \qquad \int_1^2 \frac{(\log x)^{1/4}}{x(x-1)^2}\, dx; \qquad \int_1^2 \frac{\log x}{x(x-1)^2 \log^2(x-1)}\, dx.$$

10. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{n^{2n}}\,; \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n!)^{1/n}}\,; \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\log(n!)}{n^2}\,.$$

11. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = 4\cos(2x).$$

$A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x) + x\,\mathrm{sen}(2x)$

12. (**CON SVOLGIMENTO**) Data l'equazione differenziale

$$y' = ye^{-y} \qquad y(0) = 1,$$

studiare il dominio della soluzione, la monotonia, la convessità, l'esistenza eventuale di asintoti orizzontali e verticali, e disegnarne un grafico qualitativo.

- la soluzione esiste ed è unica.
- $y=0$ è soluzione libera quindi $y(x)>0$ sempre.
- Siccome $\max\limits_{y>0} ye^{-y} = \frac{1}{e}$ il dominio della soluzione è tutto $\mathbb{R}$, quindi non ci sono asintoti verticali.
- essendo $y(x)>0$ la soluzione è sempre crescente.
- per $x\to-\infty$ si ha $y(x)\to 0$ (asintoto orizzontale)
- per $x\to+\infty$ non può essere $y(x)\to L$ finito, perché si avrebbe $y'(x)\to Le^{-L}>0$, quindi non c'è asintoto orizzontale.
- per $x\to+\infty$ non c'è asintoto obliquo perché $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 0.$
- convessità: $y'' = y'e^{-y}(1-y)$, quindi c'è un flesso quando $y=1$, cioè per $x=0$. Allora $y(x)$ è convessa su $\mathbb{R}^-$ e concava su $\mathbb{R}^+$.