Analisi Matematica I - Ing. Meccanica
Esame del 31.1.2024

cognome	nome	matr.	scritto	voto	finale
Coccagno	Domenico	659334	10	**21**	
D'Avino	Antonio	681367	12	**25**	
Galassi	Davide	655819	10,5	**22**	
Lungaro	Mattia	655979	11	**23**	

NON AMMESSI

Franceschini	Matteo Giacomo	635387	4
Lopez Camayo	Alexander	661421	2
Macii	Alessandro	607470	2
Politi	Nicola	655185	4

cognome nome matr.

Analisi Matematica I - Ingegneria Meccanica
Esame Scritto del 31/01/2024

1. Scrivere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa

$$z^2 - z(1+i) + i = 0.$$

$z=1$
$z=i$

2. Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\log(\tan x)} \qquad \text{con } x \in [0, \pi].$$

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\sin^3 x}.$$

$\frac{1}{3}$

4. Determinare il valore minimo della funzione

$$f(x) = \frac{x}{2} - \arctan x \qquad \text{con } x \geq 0.$$

$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$

5. Determinare le regioni in cui risulta crescente la funzione

$$f(x) = 9 \arctan x - 4x^3 \qquad \text{con } x \geq 0.$$

$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

6. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\arctan x = x^3.$$

3

7. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

$\frac{2+3\pi}{8}$

8. Determinare le regioni in cui risulta convessa la funzione

$$f(x) = \log(1+x^2).$$

$[-1, 1]$

9. Tra gli integrali impropri seguenti indicare quelli che risultano convergenti:

$$\int_0^1 \frac{x^{1/4}}{\sin^2 x}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sin^2 x \log^2(\sin x)}\, dx.$$

10. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\binom{3n}{2n}}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n!)^{2/n}}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

11. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{x} \qquad \text{con } y(1) = 1.$$

$y(x) = \left(1 + \frac{1}{2}\log x\right)^2$

12. (**CON SVOLGIMENTO**) Data l'equazione differenziale

$$y' = \log y \qquad \text{con } y(0) = 2.$$

studiare il dominio della soluzione, la monotonia, la convessità, l'esistenza eventuale di asintoti orizzontali e verticali, e disegnarne un grafico qualitativo.

- La soluzione esiste ed è unica.
- $y = 1$ è soluzione libera, quindi $y(x) > 1$ sempre, per cui $y'(x) > 0$ ed $y(x)$ è crescente.
- Per $y > 1$ si ha $\log y \leq y$, quindi si applica il teorema di esistenza globale e la soluzione $y(x)$ ha come dominio tutto $\mathbb{R}$.
- Per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto orizzontale $y = 1$.
- Per $x \to +\infty$ non ci sono asintoti orizzontali, perché se $y \to L > 1$ si avrebbe $y' \to \log L > 0$. Quindi $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.
- Per $x \to +\infty$ non ci sono asintoti obliqui, perché
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty.$$
- $y'' = \frac{y'}{y} > 0$ sempre, quindi $y(x)$ è convessa.