Analisi Matematica I - Ing. Meccanica
Esame del 16.2.2024

cognome	nome	matr.	scritto	voto	finale
Battaglia	Clara	660252	9,5	**20**	
Lopez Camayo	Alexander	661421	10	**21**	
Romani	Luca	655107	6,5	**12**	

NON AMMESSI

Amrany	Hassna	607420	3
Di Sandro	Nicolo'	665501	5,5
Franceschini	Matteo Giacomo	635387	3,5
Macii	Alessandro	607470	4
Sartini	Cristian	659853	4

cognome nome matr.

Analisi Matematica I - Ingegneria Meccanica
Esame Scritto del 16/02/2024

1. Scrivere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione complessa

$$|z|^2 = i\bar{z}.$$

$z=0, \ z=i$

2. Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\log\left(2(1-\sin^2 x)\right)} \qquad \text{con } x \in [0, \pi/2].$$

$[0, \frac{\pi}{4}]$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\tan^2 x) - \sin^2 x}{x^4}.$$

$\frac{1}{2}$

4. Determinare il valore massimo della funzione

$$f(x) = 2x - \tan x \qquad \text{con } 0 \le x < \pi/2.$$

$\frac{\pi}{2} - 1$

5. Determinare le regioni in cui risulta crescente la funzione

$$f(x) = 6x - \tan^3 x \qquad \text{con } 0 \le x < \pi/2.$$

$[0, \frac{\pi}{4}]$

6. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\tan^2 x = x \qquad \text{con } x \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

2

7. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

$\frac{2+\pi}{8}$

8. Determinare le regioni in cui risulta convessa la funzione

$$f(x) = \sqrt{1+8\sin^2 x} \qquad \text{con } x \in [0, \pi/2].$$

$[0, \frac{\pi}{6}]$

9. Tra gli integrali impropri seguenti indicare quelli che risultano convergenti:

$$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{x^3}\, dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{\frac{\arctan x}{\log(1+x^2)}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{(\arctan x)^2}\, dx.$$

10. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n + n!}{n^{n+2} + (n+2)!}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^n - n!}{n^{n+1} + (n+1)!}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n+2} - (n+2)!}{n^{n+3} + (n+3)!}.$$

11. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{y^{1/3}}{\sqrt{x}} \qquad \text{con } y(1) = 1.$$

$$y = \left(\frac{4\sqrt{x} - 1}{3}\right)^{3/2}$$

12. **(CON SVOLGIMENTO)** Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\sin y}{y} \qquad \text{con } y(0) = \pi/2.$$

studiare il dominio della soluzione, la monotonia, la convessità, l'esistenza eventuale di asintoti orizzontali e verticali, e disegnarne un grafico qualitativo.

- La soluzione esiste ed è unica.
- Si applica il teorema di esistenza globale (considerando $\frac{\operatorname{sen} y}{y}$ definita uguale a 1 per $y=0$), quindi il dominio di $y(x)$ è tutto $\mathbb{R}$.
- Soluzioni libere $y = \pi$ e $y = -\pi$, quindi $-\pi < y(x) < \pi$ sempre.
- Si ha $\frac{\operatorname{sen} y}{y} > 0$ per $y \in]-\pi, \pi[$, quindi $y(x)$ è strettamente crescente.
- Asintoti orizzontali: $y(x) \to \pi$ per $x \to +\infty$ e $y \to -\pi$ per $x \to -\infty$.
- $y'' = y'(y\cos y - \operatorname{sen} y) = y'\cos y\,(y - \operatorname{tg} y)$. Siccome $y' > 0$ e $\operatorname{tg} y > y$ in $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, tenuto conto del segno di $\cos y$ si ha:

$$\begin{cases} y(x) \text{ è concava per } y \geq 0 \\ y(x) \text{ è convessa per } y \leq 0. \end{cases}$$