

Esercizi sui numeri complessi

- Scrivere in forma polare i numeri complessi:

$$z = i,$$

$$z = 1 + i,$$

$$z = \frac{1}{(3 + 3i)},$$

$$z = \frac{4i}{(\sqrt{3} + i)},$$

$$z = (1 + i)(2 - 2i).$$

- Scrivere in forma algebrica e polare i numeri complessi:

$$z = \left(\frac{2}{\sqrt{3} - i} + \frac{1}{i} \right)^{22},$$

$$z = \left(\frac{1 + i}{2 - 2i} \right)^6,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^{1005}.$$

- Risolvere e rappresentare sul piano complesso le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$z^2 + 3iz + 4 = 0,$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0,$$

$$z|z| - 2z + i = 0,$$

$$|z|^2 - \bar{z} + \frac{i}{4} = 0,$$

$$z^3 = |z|^2,$$

$$\frac{1 + iz}{i + iz} = z,$$

$$2(z + 3i) + (z + \bar{z})(i + z - \bar{z}) = 0,$$

$$z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

- Scrivere in forma algebrica e polare e disegnare nel piano complesso i numeri complessi:

$$z = (1 - \sqrt{3}i)^{1/4},$$

$$z = (1 - i + \sqrt{2}i)^{1/6},$$

$$z = \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^{1/4}.$$

- Risolvere e rappresentare sul complesso le soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\bar{z}(z + i)) \leq 2 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \\ \operatorname{Re} z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^z e^w = -1 + i \\ e^z + e^w = -1 - 2i \end{cases}$$

- Risolvere e rappresentare sul piano complesso le soluzioni delle seguenti equazioni o disequazioni:

$$z^4 + iz^3 + z^2 + iz = 0,$$

$$(z^2 - 2i)^2 = (z^2 + 4z)^2,$$

$$|z| = i - 4z,$$

$$z^8 + |z|^8 = 0,$$

$$e^z + 1 + i = 0,$$

$$|z + i| > |z - i|.$$

- Trovare un polinomio $P(z)$ a coefficienti reali, di grado più basso possibile, avente $z = 3$ come radice semplice, $z = 2 - 3i$ come radice doppia, e tale che $P(0) = 1$.
- Determinare i parametri reali a, b tali che l'equazione complessa $z^2 + aiz + b = 0$ abbia soluzioni con parte reale nulla.