

## Esercizi sui numeri complessi

- Scrivere in forma polare i numeri complessi:

$$\begin{aligned}z &= i, \\z &= 1 + i, \\z &= \frac{1}{(3 + 3i)}, \\z &= \frac{4i}{(\sqrt{3} + i)}, \\z &= (1 + i)(2 - 2i).\end{aligned}$$

- Scrivere in forma algebrica e polare i numeri complessi:

$$\begin{aligned}z &= \left( \frac{2}{\sqrt{3} - i} + \frac{1}{i} \right)^{22}, \\z &= \left( \frac{1 + i}{2 - 2i} \right)^6, \\z &= \left( \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^{1005}.\end{aligned}$$

- Risolvere e rappresentare sul piano complesso le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}z^2 + 3iz + 4 &= 0, \\z^2 - 2z + 2 &= 0, \\z^4 + 2z^2 + 4 &= 0, \\z|z| - 2z + i &= 0, \\|z|^2 - \bar{z} + \frac{i}{4} &= 0, \\z^3 &= |z|^2, \\\frac{1 + iz}{i + iz} &= z, \\2(z + 3i) + (z + \bar{z})(i + z - \bar{z}) &= 0, \\z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 &= 0.\end{aligned}$$

- Scrivere in forma algebrica e polare e disegnare nel piano complesso i numeri complessi:

$$\begin{aligned}z &= (1 - \sqrt{3}i)^{1/4}, \\z &= (1 - i + \sqrt{2}i)^{1/6}, \\z &= \left( \frac{1 + i}{1 - i} \right)^{1/4}.\end{aligned}$$

- Risolvere e rappresentare sul complesso le soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\bar{z}(z + i)) \leq 2 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \\ \operatorname{Re} z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} e^z e^w = -1 + i \\ e^z + e^w = -1 - 2i \end{cases}$$

- Risolvere e rappresentare sul piano complesso le soluzioni delle seguenti equazioni o disequazioni:

$$z^4 + iz^3 + z^2 + iz = 0,$$

$$(z^2 - 2i)^2 = (z^2 + 4z)^2,$$

$$|z| = i - 4z,$$

$$z^8 + |z|^8 = 0,$$

$$e^z + 1 + i = 0,$$

$$|z + i| > |z - i|.$$

- Trovare un polinomio  $P(z)$  a coefficienti reali, di grado più basso possibile, avente  $z = 3$  come radice semplice,  $z = 2 - 3i$  come radice doppia, e tale che  $P(0) = 1$ .
- Determinare i parametri reali  $a, b$  tali che l'equazione complessa  $z^2 + aiz + b = 0$  abbia soluzioni con parte reale nulla.