Introduzione

In questo documento vengono proposte le soluzioni di due esercizi assegnati agli esami scritti: uno studio di funzione e uno studio qualitativo di un'equazione differenziale non risolvibile esplicitamente. Ogni esercizio è diviso in due parti: la prima, in cui si mostra come svolgere l'esercizio; la seconda, in cui si mostra come riportare le soluzioni sul foglio d'esame in maniera sintetica ed efficace.

1. Fac-simile studio di funzione

Premessa

Per tracciare il grafico di una funzione bisogna cercare di svolgere i seguenti punti:

1. Dominio, parità/disparità/periodicità, segno;
2. Limiti agli estremi del dominio;
3. Eventuali asintoti (orizzontali, verticali o obliqui);
4. Derivata prima e suo segno;
5. Derivata seconda e suo segno.
6. Grafico qualitativo coerente con i punti precedenti.

Seguire questo preciso ordine è fondamentale in quanto consente di evidenziare eventuali incongruenze nello svolgimento dell'esercizio.

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{-\arctan|x|}$$

e tracciare un grafico qualitativo da cui risultano le proprietà essenziali.

Svolgimento

Il dominio della funzione è chiaramente l'insieme dei numeri reali poiché la funzione è data dal prodotto di un polinomio di primo grado e da una funzione esponenziale il cui argomento non presenta criticità; infatti, la funzione arcotangente, che presenta come argomento un polinomio di grado unitario, è definita su tutto l'asse dei reali. Pertanto, indicando con D l'insieme di definizione della funzione, si ha

$$D = \mathbb{R} \tag{1-1}$$

La funzione f è chiaramente dispari in quanto è data dal prodotto di una funzione dispari ($r(x) = x$) e di una funzione pari ($s(x) = e^{-\arctan|x|}$); pertanto se ne studierà il comportamento nel semiasse dei reali positivi. In tal caso, la presenza del modulo è superflua e la funzione può essere così riscritta

$$g(x) = xe^{-\arctan x}, se\ x > 0 \tag{1-2}$$

Per quanto concerne il segno, si ha chiaramente che la funzione è positiva nel semiasse dei reali positivi. L'estremo superiore del dominio è $+\infty$; pertanto, per valutare il comportamento della funzione si deve calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\arctan x} = +\infty * e^{-\frac{\pi}{2}} = +\infty \tag{1-3}$$

Per quanto concerne gli asintoti, il dominio della funzione consente di escludere asintoti verticali; inoltre, poiché la funzione non è limitata superiormente (per $x \to +\infty$) si possono escludere asintoti orizzontali. La funzione potrebbe[1] quindi presentare asintoti obliqui. Per calcolare gli asintoti obliqui, si devono risolvere i limiti riportati nelle equazioni (1-4) e (1-5).

[1] Si utilizza il condizionale in quanto esistono funzioni non limitate superiormente (per $x \to +\infty$) ma che non presentano alcun asintoto obliquo (e.g. $\log x$).

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} \tag{1-4}$$
$$q = \lim_{x \to +\infty} g(x) - mx \tag{1-5}$$

Il limite riportato nell'equazione (1-4) è molto semplice e fornisce come risultato $e^{-\pi/2}$. Il limite riportato in equazione (1-5) può essere così riscritto

$$q = e^{-\pi/2} \lim_{x \to +\infty} x(e^{-\arctan x + \pi/2} - 1) \tag{1-6}$$

Ricordando l'uguaglianza $\pi/2 = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ e utilizzando lo sviluppo asintotico della funzione $\arctan(1/x)$ arrestato al primo ordine, l'equazione (1-6) può essere così riscritta

$$q = e^{-\pi/2} \lim_{x \to +\infty} x(e^{\arctan(1/x)} - 1) \cong e^{-\pi/2} \lim_{x \to +\infty} x(e^{1/x} - 1) = e^{-\pi/2} \tag{1-7}$$

Pertanto, l'asintoto obliquo (per $x \to +\infty$) è definito dall'equazione (1-8).

$$y = e^{-\pi/2}(x+1) \tag{1-8}$$

Per valutare l'andamento della funzione nei punti interni del dominio si calcolano la derivata prima e seconda. Applicando le ben note regole di derivazione si ottiene

$$g'(x) = (x^2 - x + 1)e^{-\arctan x} \tag{1-9}$$
$$g''(x) = \frac{x-2}{(x^2+1)^2} e^{-\arctan x} \tag{1-10}$$

Ricordiamo al lettore che tali derivate valgono soltanto nel semiasse reale positivo. La derivata prima è sempre positiva e la funzione $g(x)$ risulterà sempre crescente in $[0, +\infty[$. La deriva seconda è positiva nell'insieme $x \geq 2$, pertanto la funzione $g(x)$ è convessa in $[2, +\infty[$ e concava in [0,2].

Nota la disparità della funzione, è possibile traslare i risultati fin qui ottenuti nel semiasse negativo dei reali. Per quanto riguarda il segno, f è negativa. Per calcolare l'asintoto obliquo è sufficiente ricordare la definizione di funzione dispari ($-f(x) = f(-x)$). L'equazione (1-8) può essere così riscritta

$$-y = e^{-\pi/2}(-x+1) \to y = e^{-\pi/2}(x-1) \tag{1-11}$$

La derivata prima, che è una funzione pari[2], sarà anch'essa strettamente positiva. La derivata seconda, che è una funzione dispari, è convessa in $[-2{,}0[$ e concava in $[-\infty, -2]$. È possibile ottenere tali risultati calcolando esplicitamente le derivate usando la definizione di funzione dispari come mostrato per l'asintoto obliquo. Si lascia al lettore tale esercizio. In Figura 1-1 è riportato il grafico qualitativo con le sue proprietà essenziali.

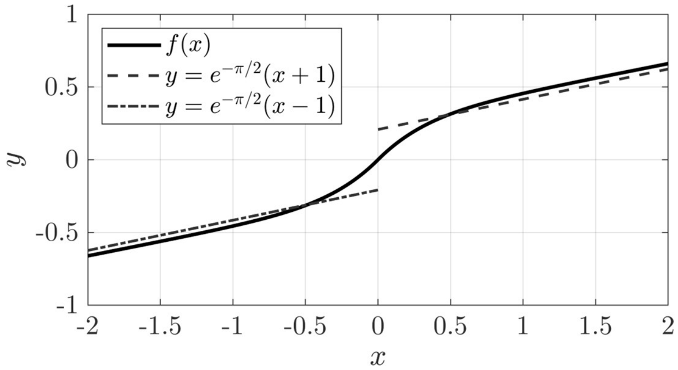


Figura 1-1. Grafico di $f(x)$ con le proprietà essenziali.

[2] La derivata di una funzione dispari è una funzione pari

Fac-simile svolgimento domanda aperta dell'esame scritto

Come riportare le soluzioni sul foglio d'esame

Per riportare efficacemente lo svolgimento dell'esercizio sul foglio d'esame è sufficiente riportare i risultati essenziali evitando di inserire numerosi calcoli che occupano inutilmente spazio. Si riporta qui di seguito come devono essere riportate le principali informazioni del suddetto esercizio.

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. La funzione è dispari ed è positiva per $x > 0$.
La studio nell'insieme $x > 0$ e sfrutto la disparità per ricavare i risultati in $x < 0$. Pertanto, definisco

$$g(x) = xe^{-\arctan x}, se\ x > 0$$

La funzione g presenta un asintoto obliquo di equazione $y = e^{-\frac{\pi}{2}}(x+1)$ così calcolato

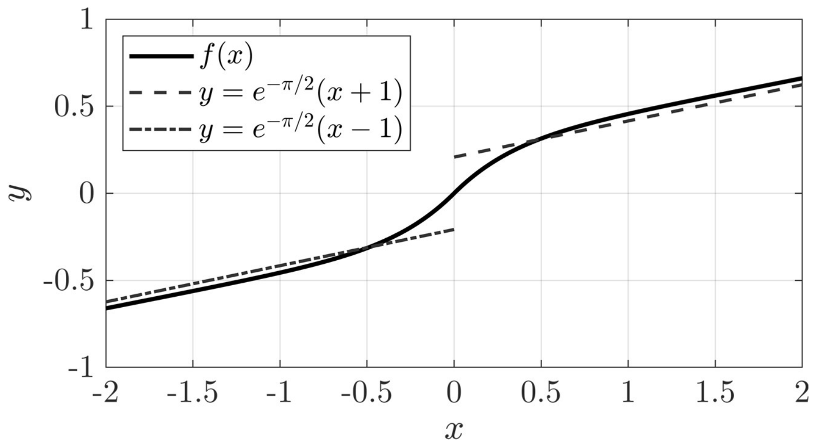
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = e^{-\pi/2} \qquad q = \lim_{x\to+\infty} g(x) - mx = e^{-\pi/2}$$

Il secondo limite è stato risolto utilizzando la relazione $\pi/2 = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ e lo sviluppo asintotico di $\arctan(1/x)$ arrestato al primo ordine.

Si ottengono derivata prima e seconda

$$g'(x) = (x^2 - x + 1)e^{-\arctan x} \qquad g''(x) = \frac{x-2}{(x^2+1)^2}e^{-\arctan x}$$

La funzione $f(x)$ è crescente in $[0, +\infty[$ ed è convessa in $[2, +\infty[$ e concava in $[0,2]$.
In $[-\infty, 0[$ si ha che l'asintoto obliquo è $y = e^{-\frac{\pi}{2}}(x-1)$, la funzione $f(x)$ è crescente in $[-\infty, 0[$ ed è convessa in $[-2,0[$ e concava in $[-\infty, -2]$.



2. Fac-simile studio qualitativo equazione differenziale

Premessa

Per tracciare il grafico qualitativo della soluzione di un problema di Cauchy del tipo

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

si cerca di svolgere sequenzialmente i seguenti punti:

1. Valutare il segno di f, parità/disparità ed eventuali asintoti;
2. Dedurre le zone di monotonia della soluzione massimale;
3. Cercare di stabilire se il dominio è tutto $\mathbb{R}$ oppure un intervallo limitato, saranno utili il teorema di esistenza globale, eventuali soluzioni libere, il teorema del confronto;
4. Il segno della derivata seconda fornirà informazioni sulla convessità della soluzione.

Seguire questo preciso ordine è fondamentale in quanto consente di evidenziare eventuali incongruenze nello svolgimento dell'esercizio.

Testo

Dato il problema di Cauchy

$$y' = y - \frac{1}{x} \quad , \quad y(1) = 1$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione da cui risultano le proprietà essenziali tra cui, in particolare, il dominio.

Svolgimento

La soluzione è unica in quanto si può utilizzare il *Teorema di unicità di Cauchy-Lipschitz.* Per determinare l'andamento della funzione $y(x)$, si può notare che la sua derivata è positiva nella regione piana $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 1/x\}$ ed è negativa nella regione $\Omega \backslash \mathrm{A}$. Con queste informazioni preliminari è possibile tracciare un primo andamento; infatti, partendo dalla condizione iniziale, si può intuire che nell'intervallo $(1, +\infty)$ la funzione sarà crescente, mentre nell'intervallo (0,1) la funzione sarà decrescente. Per dimostrare che la funzione è crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$ è sufficiente utilizzare il teorema del confronto[3]. Si considerino i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - 1/x \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = -1/x^2 \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

[3]Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ e siano $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e localmente lipschitziane rispetto a y. Siano u e v le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = g(x, u) \\ v(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $f(x, u) \leq g(x, u) \ \forall \ (x, y) \in \Omega$, allora

$$\begin{cases} u(x) \leq v(x) \, se \ x > x_0 \\ u(x) \geq v(x) \, se \ x < x_0 \end{cases}$$

Ove $v(x) = 1/x$ è la soluzione del secondo problema di Cauchy. $\forall\ (x, y) \in$ A, $y'(x) > 0 > v'(x)$, perciò $y(x) > v(x)$ se $x > 1$; pertanto, $y'(x) = y(x) - v(x) > 0$ ed $y(x)$ è una funzione crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$. Per dimostrare che la funzione è decrescente nell'intervallo (0,1) è sufficiente ragionare per assurdo: supponiamo che nell'intervallo (0,1) la funzione sia crescente, pertanto $y'(x) = y - 1/x > 0$; questa condizione comporta che $\forall\ x\ \in (0,1)\ y > 1/x > 1$ ma se y è crescente deve valere la condizione $y < 1$; pertanto l'assurdo. Poiché la funzione è decrescente in (0,1) e crescente in $(1, +\infty)$, ne consegue che $y(x) \geq 1\ \forall\ x\ \in (0, +\infty)$ e il punto (1,1) rappresenta il minimo assoluto della funzione.

Per determinare il dominio massimale, dobbiamo verificare se la funzione esplode per $x \to +\infty$. Per dimostrare ciò, è utile ancora una volta utilizzare il teorema del confronto. Si considerino i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - 1/x \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = v \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

Ove $v(x) = e^{x-1}$ è la soluzione del secondo problema di Cauchy. $\forall\ (x, y) \in$ A, $y'(x) < v'(x)$, perciò $y(x) < v(x)$ se $x > 1$. La funzione $v(x)$ non presenta asintoti verticali, pertanto neanche $y(x)$ ne avrà. Si conclude che il dominio è $(0, +\infty)$.

Per determinare la convessità della funzione, è sufficiente studiare la derivata seconda

$$y'' = y' + \frac{1}{x^2} = y - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \tag{2-1}$$

La derivata seconda è sempre positiva in $(0, +\infty)$ perché $y \geq 1 > 1/4 \geq (x-1)/x^2$. Il valore 1/4 è il sup della funzione $(x-1)/x^2$ in $(0, +\infty)$. In Figura 2-1 (sinistra) è rappresento un grafico qualitativo della soluzione del problema di Cauchy. In Figura 2-1 (destra) è rappresentato l'andamento della derivata.

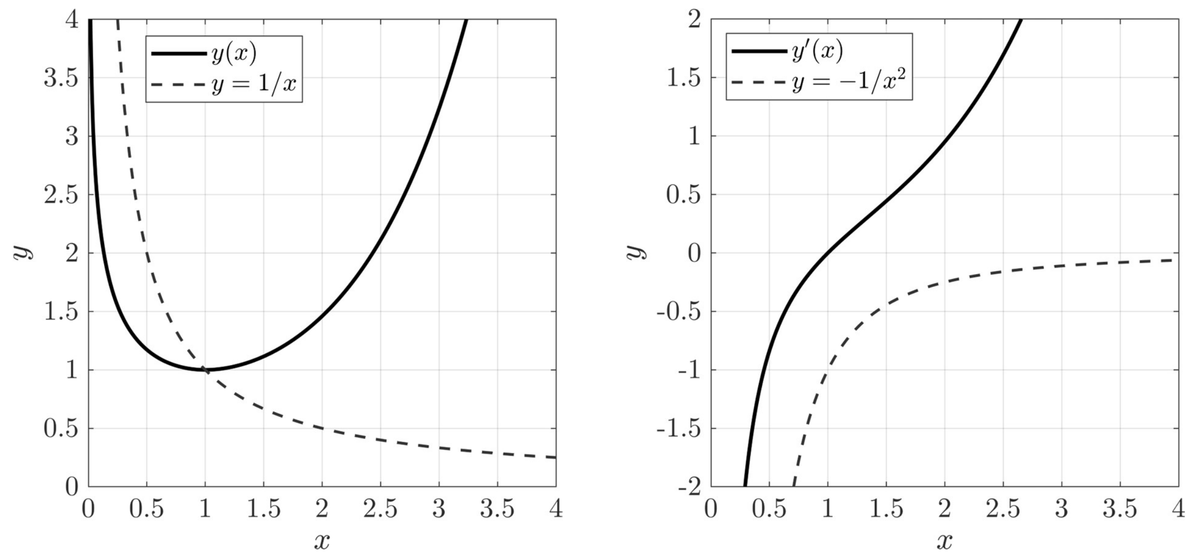


Figura 2-1. Grafico di $y(x)$ (sinistra) e di $y'(x)$ (destra).

Fac-simile svolgimento domanda aperta dell'esame scritto

Come riportare le soluzioni sul foglio d'esame

Per riportare efficacemente lo svolgimento dell'esercizio sul foglio d'esame è sufficiente riportare i risultati essenziali evitando di inserire numerosi calcoli che occupano inutilmente spazio. Si riporta qui di seguito come devono essere riportate le principali informazioni del suddetto esercizio.

$y(x)$ è una funzione crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$. Confrontando i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - 1/x \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = -1/x^2 \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

Ove la soluzione del secondo problema di Cauchy è $v(x) = 1/x$. Sia $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 1/x\}$, $\forall\ (x, y) \in A$, $y'(x) > 0 > v'(x)$, perciò $y(x) > v(x)$ e $y(x)$ se $x>1$ ed $y(x)$ è una funzione crescente.

$y(x)$ è decrescente nell'intervallo (0,1). Supponiamo che nell'intervallo (0,1) la funzione sia crescente; pertanto $y'(x) = y - 1/x > 0$; questa condizione comporta che $\forall\ x\ \in (0,1)\ y > 1/x > 1$ ma se y è crescente deve valere la condizione $y < 1$; questo è un assurdo, ne consegue che la funzione deve essere decrescente.
$y(x) \geq 1\ \forall\ x \in (0, +\infty)$.

Il dominio è $(0, +\infty)$. Confrontando i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - 1/x \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = v \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

Ove $v(x) = e^{x-1}$ è la soluzione del secondo problema di Cauchy. $\forall\ (x, y) \in \mathrm{A}$, $y'(x) < v'(x)$, perciò $y(x) < v(x)$ se $x>1$. Poiché $v(x)$ non presenta asintoti verticali, neanche $y(x)$ ne avrà.

La funzione è convessa in tutto il suo dominio.

$$y'' = y - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = y - \frac{x-1}{x^2}$$

La derivata seconda è sempre positiva perché vale la catena di disuguaglianze
$y \geq 1 > 1/4 \geq (x-1)/x^2$. $1/4 = \sup\{g \in \mathbb{R} \colon g = (x-1)/x^2, x > 0\}$.