Il periodo di un pendolo

È noto che il periodo di un pendolo, cioè il tempo impiegato dal pendolo per andare da un estremo all'altro e ritornare nell'estremo iniziale, dipende dall'ampiezza dell'oscillazione; ci proponiamo di calcolare il periodo in funzione di tale ampiezza. Consideriamo un pendolo senza attrito come in figura e indichiamo con L la lunghezza del filo, con θ l'angolo iniziale, con $\alpha(t)$ l'angolo che il filo fa con la verticale al tempo t.

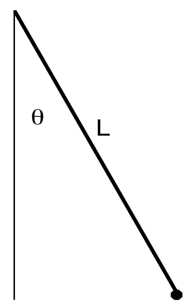

Figure 1: Il pendolo nella posizione iniziale.

Dalle equazioni della Meccanica si trova facilmente che $\alpha(t)$ verifica il problema di Cauchy

$$L\alpha'' = -g\sin\alpha, \qquad \alpha(0)=\theta,\ \alpha'(0)=0.$$

Moltiplicando per α' ed integrando si ha

$$L(\alpha')^2 = 2g(\cos\alpha - \cos\theta)$$

da cui si ricava l'espressione per il periodo $T(\theta)$ in funzione dell'ampiezza θ

$$T(\theta) = \int_0^T dt = 4\int_0^\theta \frac{d\alpha}{\alpha'} = \left(\frac{8L}{g}\right)^{1/2}\int_0^\theta \frac{d\alpha}{(\cos\alpha - \cos\theta)^{1/2}} = \left(\frac{8L}{g}\right)^{1/2}\int_0^1 \frac{\theta\, ds}{(\cos(s\theta) - \cos\theta)^{1/2}}\ .$$

La figura seguente mostra il grafico del periodo $T(\theta)$.

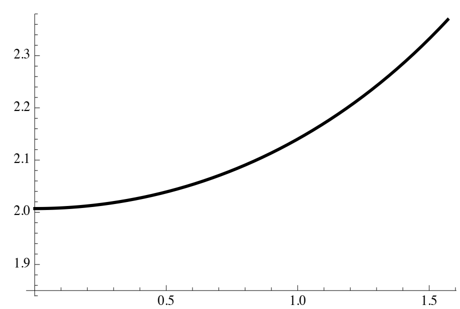

Figure 2: Grafico del periodo $T(\theta)$ per $0 \le \theta \le \pi/2$.

Per θ piccolo lo sviluppo di Taylor di $\theta(\cos(s\theta) - \cos\theta)^{-1/2}$ è

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}\Big(1 + \frac{\theta^2}{24}(1+s^2) + O(\theta^4)\Big)$$

da cui si ricava

$$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\Big(1 + \frac{\theta^2}{16} + O(\theta^4)\Big).$$