Prova libera n. 8

1. Determinare i numeri reali α per cui risulti convergente l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{x^4\cosh x+1}\Big)^\alpha\,dx$$

2. Determinare i numeri reali α per cui risulti convergente l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \Big(\frac{x\arctan x}{x^7+\sin(e^x)}\Big)^\alpha\,dx$$

3. Tra gli integrali impropri seguenti indicare quelli che risultano convergenti:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(1-x^{3/2})}{x^3\log(1+x)}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(1+x^{3/2})}{x^4\log(1+x)}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\log(1+x^{3/4})}\,dx.$$

4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2+3n}\,.$$

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n\ge1}\frac{\sqrt{2+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2n}}\,.$$

6. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n\ge1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,, \qquad \sum_{n\ge1}\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}\,, \qquad \sum_{n\ge1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{(n^2)}\,.$$

7. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n\ge1}(-1)^n\big(1-n\sin(1/n)\big)\,, \qquad \sum_{n\ge1}(-1)^n(2^{1/n}-1)\,, \qquad \sum_{n\ge1}\frac{n\cos(n\pi)}{1+n}\,.$$

8. Determinare i numeri reali x per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n2^n}\,.$$

9. Determinare i numeri reali x per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n\ge1} n^x x^n\,.$$

10. Data la successione definita per induzione da:

$$a_0=1, \qquad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2^{-n},$$

stabilire se risulta convergente la serie $\sum_{n\ge0}a_n$ ed eventualmente calcolarne la somma.