Algebra II
28 Giugno 2010

1. **Esercizio 1.** Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{Z}$ il conucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ data da $f(x, y, z) = (2y+2z, ax+2y-z, bx)$ e' uno $\mathbb{Z}$ – modulo ciclico.

   Esercizio 2. Sia A un anello commutativo con identita', $I \subset A$ un ideale e sia $a \in A$ fissato. Consideriamo l'insieme $J = \{f \in A[x] \mid f(a) \in I\}$

   a. Provare che J é un ideale

   b. Provare cje J e' primo se e solo se I primo

   c. Se $A = \mathbb{Q}[y]$, $a = y - 1$ e $I = (y - 2)$ trovare J.

   Esercizio 3. Sia A un anello, Provare che $A[x]$ PID se e solo se A un campo.

   Esercizio 4. Siano $I, J \subset A$ ideali, provare che sono fatti equivalenti:

   a. $I + J = (1)$

   b. $\sqrt{I + J} = (1)$

   c. $\sqrt{I} + \sqrt{J} = (1)$

   Esercizio 5. Sia $M = \mathbb{Z}/(10) \oplus \mathbb{Z}/(12)$, provare che:

   a. esistono solo un numero finito di primi$p \in \mathbb{Z}$ tali che $M_{(p)} \neq 0$

   b. Troivare per quali primi $p \in \mathbb{Z}$ $M_{(p)} \neq 0$

   c. Descrivere $M_{(3)} \neq 0$.