Algebra II
28 Giugno 2010 – Traccia delle soluzioni

1. **Esercizio 1.** Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{Z}$ il conucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ data da $f(x, y, z) = (2y + 2z, ax + 2y - z, bx)$ e' uno $\mathbb{Z}$ – modulo ciclico.

   Svolgimento Sia Δ_i il massimo comun divisore dei determinanti $i \times i$, quindi se $S = diag(d_1, d_2, d_3)$ e' la forma di Smith della matrice di f si ha: $d_1 = \Delta_1 = 1$,$d_2 = \Delta_2$ e $d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}$. Si ha $\Delta_2 = (b, 2a, 6), \Delta_3 = 6b$, e Δ_2 divide Δ_3, e sia b che 6. Quindi affinche' il coker sia ciclico dovremo avere che $(b, 2a, 6) = 1$. ossia $b \not\equiv 0 \pmod 2$ e $(a, b) \not\equiv 0 \pmod 3$. Infatti $(2a, b, 6) = ((2a, 6), b) = (2(a, 3), b) = (2, b)((a, 3), b) = (2, b)((a, b), 3)$.

   Esercizio 2. Svolgimento Consideriamo l'omomorfismo $\phi_a : A[x] \longrightarrow A$ dato da $\phi_a(f) = f(a)$, allora $J = {\phi_a}^{-1}(I)$ e quindi e' un ideale di $A[x]$. Inoltre ϕ_a induce un omomorfismo surgettivo $\psi_a : A[x] \longrightarrow A/I$ e $Ker\psi = J$. Allora $A[x]/J \cong A/I$ quindi I e' primo se e solo se J e' primo. Si ha che $(y - 2) = \phi_a(x - 1)$, quindi $(x - 1, y - 2) \subset J$. Dal momento che J e' un ideale proprio ($x \notin J$) e $(x - 1, y - 2)$ e' massimale si ha che $J = (x - 1, y - 2)$.

   Esercizio 3. Svolgimento Se A e' un campo allora $A[x]$ e' euclideo quindi PID. Viceversa considerando l'omomorfismo surgettivo $\phi_0 : A[x] \longrightarrow A$ dato da $\phi_0(f) = f(0)$ si ha che $A[x]/(x) \cong A$. Dato che A e' un dominio l'ideale (x) e' primo e quindi massimale dato che $A[x]$ e' PID, quindi A e' un campo.

   Esercizio 4. Svolgimentoi) Dato che per ogni ideale $I \subset \sqrt{I}$ se $I+J = 1$ allora anche le altre identita' valgono. Se $1 \in \sqrt{I + J}$ allora $1 = 1^m =\in I+J$. Infine se $a+b = 1$ e $a^m \in I$ e $b^n \in J$ allora $1 = (a = b)^{m+n-1} \in I+J$.

   ii) Si ha che $y - 2, z(z - 1) \in \sqrt{I}$ da cui si ottiene che $(x^2 + z - 4, y - 2, z(z - 1), x^2 - 2, 2x + 2z^2 - 1, z^3 - z) \subset \sqrt{I} + \sqrt{J}$ cosi' $z - 2$ e quindi $6\sqrt{I} + \sqrt{J}$, la tesi segue cosi' dalla prima parte dell'esercizio.

   Esercizio 5. Svolgimento $M_{(p)} = 0$ se e solo se per ogni $m \in M$ esiste $s \notin (p)$ tale che $sm = 0$. Se $p \neq 2, 3, 5$ allora $60 \in S = \mathbb{Z} \setminus (p)$ e $60m = 0$.