Algebra II
8 Febbraio 2011

1. a) Sia M una matrice 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di determinante 2^n, sia $\varphi_M : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definita da M, e sia $A = \operatorname{coker} \varphi_M$.

   Quante distinte classi di isomorfismo si ottengono al variare di M?.

   b) Sia p un numero primo e sia M una matrice 3×3 a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di determinante p^n; sia $\varphi_M : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ definita da M, e sia $A = \operatorname{coker} \varphi_M$. Dimostrare che il numero delle possibili classi di isomorfismo di A al variare di M dipende da n ma non da p.

   Dimostrazione. a) Le classi di isomorfismo sono determinate dalle possibili forme di Smith di M. Dato che il determinante e' 2^n le possibili forme sono $\begin{pmatrix} 2^h & 0 \\ 0 & 2^{n-h} \end{pmatrix}$ con $0 \leq h \leq n-h$, ossia si hanno $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ possibilita'.

   b) In questo caso le possibili forme di Smith sono $\begin{pmatrix} p^h & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 0 & 0 & p^{n-(h+k)} \end{pmatrix}$ con $0 \leq h \leq k \leq n-(h+k)$, ossia il loro numero dipende solo da n e non da p.

2. Sia $A = k[x, y, z]$ e $J = (xy, yz, xz)$.

   i) Trovare i generatori di di $I(V(J))$.

   ii) Sia $I = (xy, xz - yz)$. Provare che $\sqrt{I} = J$.

   iii) Sia $\mathfrak{m} = (x, y, z)$, provare che $dim_k(J/\mathfrak{m}J) = 3$ e dedurre che J non puo' essere generato da due polinomi.

   Dimostrazione. i) $J = (x, z) \cap (y, z) \cap (x, y)$, trattandosi di ideali primi J e'(monomiale) radicale quindi $I(V(J)) = J$.

   ii) $I \subset J$ e quindi $\sqrt{I} \subset J$. Inoltre $y^2z \in I$, cosi' $yz \in \sqrt{I}$ da cui $J \subset \sqrt{I}$.

   iii) $\mathfrak{m}J = (x^2y, x^2z, xyz, xz^2, xy^2, yz^2, y^2z)$, quindi i generatori di J sono linearmente indipendenti su k modulo $\mathfrak{m}J$ e sono una base del k spazio vettoriale $J/\mathfrak{m}J$. Se J fosse generato da due polinomi f, g allora $\{\bar{f}, \bar{g}\}$ sarebbero generatori di $J/\mathfrak{m}J$ che pero' e' uno spazio vettoriale di dimensione 3.

3. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli, sia P un ideale primo di A e sia $J = f(P)B = P^e$.

   i) Mostrare che $T = f(A \setminus P)$ e' una parte moltiplicativa di B e che $T \cap J = \emptyset$ se $f^{-1}(J) = P$.

   ii) Mostrare con un esempio che, in generale, J non e' un ideale primo di B.

iii) Mostrare che esiste un ideale primo $Q \subset B$ tale che $f^{-1}(Q) = P$ se e soltanto se $f^{-1}(J) = P$.

iv) Siano $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}/(3)$ e sia f l' omomorfismo definito da $f(x) = (\frac{x}{1}, x+3\mathbb{Z})$. Determinare tutti e soli gli ideali primi P di $\mathbb{Z}$ per i quali esiste un ideale primo Q di $\mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tale che $f^{-1}(Q) = P$.

Dimostrazione. i) $1 \in T$ inoltre se $x, y \in T$ allora $x = f(a), y = f(b)$con $a, b \notin P$ essendo P primo $ab \notin P$ quindi $xy = f(a)f(b) = f(ab) \in T$.

Se $T \cap J \neq \emptyset$ esiste $x = f(a) \in J$ con $a \in A \setminus P$ ossia $a \in f^{-1}(J)$.

ii) Basta considerare $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

iii) Se esiste Q primo tale che $f^{-1}(Q) = Q^c = P$, allora $P = Q^c = Q^{cec} = P^{ec}$.

Viceversa se $P^{ec} = P$ allora per i) $T \cap J = \emptyset$ quindi in $T^{-1}B$ esiste un ideale massimale $\hat{Q}$ tale che $J \subset \hat{Q}$. La contrazione $Q = \hat{Q} \cap B$ e' un ideale primo che contiene J e dato che $Q^c \cap (A \setminus P) = \emptyset$ si ha che $Q^c = P$.

iv) Gli ideali primi di $\mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sono $((0), (1))$, $((2), (1))$, $((1), (0))$.

Per ogni ideale primo $p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ con $p \neq 0, 2, 3$ $p^e = \mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Analizziamo i casi $p = 0, 2, 3$. Si puo' diremente analizzare la contrazione dei primi che contengono p^e oppure usare i punti precedenti.

Se $p = 0$ allora $J = p^e = ((0, 0))$ si ha $p^e \subset Q = ((0), (1))$ e $Q^c = (0)$.

Se $p = 2$ allora $J = ((2), (1))$ e $T = f(\mathbb{Z} \setminus 2) \cap J = \emptyset$, per iii) allora esiste Q tale che $Q^{ec} = (2)$. Analogamente per $p = 3$.

4. Sia $I \subset A$ un ideale, Provare che I e' radicale se e solo se per ogni primo $\mathfrak{p} \subset A$ l'ideale $I_{\mathfrak{p}}$ e' radicale.

   Dimostrazione Considerando A/I e $A_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}} \cong (A/I)_{\mathfrak{p}}$ la tesi equivale a provare che in un anello A l'ideale $\mathfrak{N}(A)$ degli elementi nilpotenti e' zero se e e solo se per ogni primo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{N}(A_{\mathfrak{p}}) = (0)$.

   Se proviamo che $\mathfrak{N}(A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{N}(A)_{\mathfrak{p}} = (0)$ la tesi segue dal fatto che essere $\mathfrak{N}(A) = 0$ e' una proprieta' locale.

   Sia $a = \frac{x}{y} \in \mathfrak{N}(A)_{\mathfrak{p}}$ con $x \in \mathfrak{N}(A)$ allora $a \in \mathfrak{N}(A_{\mathfrak{p}})$.

   Viceversa se $b = \frac{t}{s} \in \mathfrak{N}(A_{\mathfrak{p}})$ esiste $u \notin \mathfrak{p}$ tale che $ut^n = 0$ da cui $ut \in \mathfrak{N}(A)$ e $b = \frac{ut}{us} \in \mathfrak{N}(A_{\mathfrak{p}})$.

5. Provare che:

$$k[x, y, z]/(xyz - z^2, y + z - 2) \otimes_{k[x,y,z]} k[x, y, z]/(xy - z, z^2 - z) \cong k^2$$

   Dimostrazione. Siano $A = k[x, y, z], I = (xyz - z^2, y + z - 2)$ e $J = (xy - z, z^2 - z)$. Si ha che: $A/I \otimes_A A/J \cong A/I + J$. Calcolando la base di Gröbner rispetto all'ordinamento lessicografico con $x > y > z$, si ottiene:

$$I + J = (x - z, y + z - 2, z^2 - z) = (x, y - 2, z) \cap (x - 1, y - 1, z - 1)$$

   e' intersezione di due ideali massimali, da cui la tesi.