Algebra II
15 Febbraio 2012
Correzione

1. Sia M la matrice a coefficienti interi:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare la forma di Smith di M al variare di $a, b \in \mathbb{Z}$.

Soluzione Indichiamo con Δ_i il massimo comun divisore dei determinanti $i \times i$. I determinanti 2x2 sono $4, a^2 - 2b, 2a$ e il determinante della matrice e' 8. Distingiuiamo i casi a, b pari o dispari.

(a) caso 1. Se $a \equiv 1 \pmod 2$, $\forall b \in \mathbb{Z}$ si ha $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ quindi la forma di Smith e'
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) caso 2. Se $a \equiv 0 \pmod 2$ e $b \equiv 1 \pmod 2$ si ha $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$ e quindi la forma di Smith e'
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) caso 3. Se $a \equiv 0 \pmod 2$ e $b \equiv 0 \pmod 2$ si ha $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$ e quindi la forma di Smith e'
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Dire quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale e' falsa. Provare o dare un controesempio:

(a) Siano M un A-modulo. Se per ogni primo $\mathfrak{p} \subset A$ il modulo $M_{\mathfrak{p}}$ e' privo di torsione allora M e' privo di torsione.

(b) Siano A e B due anelli e $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo. Se M e' un A-modulo libero di rango k allora $M_B = M \otimes_A B$ e' un B-modulo libero di rango k.

(c) Sia A un anello, $f \in A$, non nilpotente, e $I \subset A$ un ideale. E' vero che $\sqrt{I} = \sqrt{IA_f \cap A} \cap \sqrt{(I, f)}$?

Soluzione

(a) VERO. Se $0 \neq m \in T(M)$ si ha che $Ann(m) \neq (0)$. Dato che $Ann(m) \neq (0)$ esiste $\mathfrak{m}$ un massimale di A tale che $Ann(m)_{\mathfrak{m}} \neq (0)$, quindi esiste $0 \neq y \in Ann(m)$ tale che $ym = 0$ e $0 \neq \frac{y}{1}$ in $A_{\mathfrak{m}}$. Dato che si ha che per ognii $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ $am \neq 0$ si ha anche $\frac{m}{1} \neq 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$. Ma allora da $y\frac{m}{1} = 0$ si ottiene un assurdo.

(b) VERO. Se M e' libero di rango k allora $M \cong A^k$ da cui $M_B = M \otimes_A B \cong A^k \otimes B = B^k$.

(c) VERO Osserviamo che se $f \in I$ la relazione e' banalmente vera, infatti in questo caso $IA_f \cap A = A$. Supponiamo quindi che $f \notin I$. Dato che $I \subset (I, f)$ e $I \subset IA_f \cap A$ una inclusione vale. Per l'altra inclusione se $x \in \sqrt{IA_f \cap A} \cap \sqrt{(I, f)}$ allora esistono $n \in NN$, $i \in I$, $c \in A$ e $j \in IA_f \cap I$ tali che $x^n = i + cf = j$. Dal momento che $j \in IA_f \cap I$ esiste k tale che $f^k j \in I$ e da cui segue che $cf^{k+1} = f^k j - f^k i \in I$. Allora $x^{n(k+1)} = (i + cf)^{k+1} = a + c^{k+1} f^{k+1} \in I$ e quindi $x \in \sqrt{I}$.

3. Sia $f = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ e sia $A = \mathbb{R}[x]/(f)$.

(a) Trovare i divisori di zero in A

(b) Trovare $\mathfrak{N}(A)$, il nilradicale di A.

(c) Trovare, se esistono, gli ideali primi $\mathfrak{p}$ di A tali che $\mathfrak{N}(A_{\mathfrak{p}}) \neq (0)$ e quelli per cui $A_{\mathfrak{p}}$ e' un dominio.

Soluzione

(a) $f = (x^2 + 1)(x - 1)^2$ cosi' i divisori di zero sono $(x^2 + 1) \cup (x - 1)$.

(b) I primi di A sono $(x^2 + 1)$ e $(x - 1)$ e quindi $\mathfrak{N}(A) = (x^2 + 1)(x - 1)$.

(c) localizzando in $\mathfrak{p} = (x - 1)$ si ottiene che $A_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{R}[x]/(x - 1)^2$ quindi $\mathfrak{N}(A_{\mathfrak{p}}) \neq (0)$ mentre se $\mathfrak{p} = (x^2+1)$ si ottiene che $A_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+1)^2$ quindi $A_{\mathfrak{p}}$ e' un dominio.

4. Sia $I = (x^3 + y^3 + z^3 + 1, x^2 + y^2 + z^2 + 1, x + y + z + 1) \subset \mathbb{Z}/(2)[x, y, z]$.

(a) $V(I) \subset \overline{(\mathbb{Z}/(2))}^3$ e' finito?

(b) Decomporre $V(I)$ come unione di varieta' irriducibili.

Soluzione

(a) La base di Groebner ridotta (rispetto a lex con $x > y > z$ di I e' $(x + y + z + 1, (z + 1)(y + z)(y + 1))$ quindi $V(I)$ non e' finito.

(b) Dal momento che $I = (x+y, z+1) \cap (x+1, y+z) \cap (x+z, y+1)$ e questi ideali sono primi $V(I) = V(x+y, z+1) \cup V(x+1, y+z) \cup V(x+z, y+1)$.