Algebra II
8 Luglio 2011

Esercizio 1: Sia A un anello e $\mathfrak{J}(A)$ il radicale di Jacobson di A. Provare che:

i) $a \in A$ e' invertibile se e solo se $a + \mathfrak{J}(A)$ e' invertibile in $A/\mathfrak{J}(A)$.

ii) Se $a \in \mathfrak{J}(A)$ e' idempotente allora $a = 0$.

iii) Se $I \subset A$ e' un ideale costituito da elementi nilpotenti allora $I \subset \mathfrak{J}(A)$.

Esercizio 2: Sia A un anello e sia $a \in A$, un elemento di A che non sia divisore di zero. Provare che se N e' un A modulo piatto allora $an \neq 0$ per ogni $0 \neq n \in N$.

Esercizio 3: Siano A, B e C anelli e $f : A \longrightarrow C$ e $g : B \longrightarrow C$ omomorfismi surgettivi. Definiamo $A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$. Provare che se A e B sono noetheriani allora $A \times_C B$ e' noetheriano.

Esercizio 4: i) Sia $I \subset K[x_1, .., x_n]$ un ideale e sia $f \in K[x_1, .., x_n]$. Provare che $I : (f) = \frac{1}{f}(I \cap (f))$.

ii) Se $J = (f_1, \ldots, f_k)$ allora $I : J = \bigcap_1^k (I : (f_i))$

iii) Siano $I, J \subset K[x, y]$, $I = (g_1, g_2) = (x(x + y)^2, y)$ e $J = (f_1, f_2) = (x^2, x + y)$. CaLcolare $I : J$.