Algebra II
19 Settembre 2012

Esercizio 1: Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo dato da $\phi(x, y, z) = (6x + 2y + 4z, ay + 4z, 2x + 2y + 2z)$ con a numero intero. Determinare la classe di isomorfismo di coker(ϕ) in funzione di a. Esistono valori di a per cui coker(ϕ) e' infinito?

Esercizio 2: Sia A un anello commutativo con identita'. Provare che se ogni ideale di A e' primo allora A e' un campo.

Esercizio 3: Sia M un A-modulo noetheriano e sia $I = (0 : M)$. Provare che A/I e' noetheriano.

Esercizio 4: Sia M un A-modulo e sia $Supp(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$. Provare che:

i) Se $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ e' una successione esatta allora $Supp(M) = Supp(M') \cup Supp(M")$.

ii) Se M e N sono A-moduli finitamente generati allora $Supp(M \otimes_A N) = Supp(M) \cap Supp(N)$.

Esercizio 5: Sia $I = (x^2z - x^2t^3, x^2y^4t + x^2y^3 - x^2z, xt^2) \subset \mathbb{Q}[x, y, z, t] = A$

i) I e' monomiale?

ii) trovare una decomposizione primaria di I, i primi associati e i primi minimali.

iii) Trovare i nilpotenti e i divisori di zero di A/I.