Algebra II
9 Gennaio 2013

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Provare che :

i) $coker(\phi)$ e' ciclico se e solo se $\gcd(a, b) = 1$

ii) $coker(\phi)$ ha al piu' due generatori se e solo se $\gcd(a, b, c) = 1$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Giustificare le risposte o dare un controesempio.

i) Sia A un anello e $I \subset A$ un ideale. Un elemento $a \in A$ non e' divisore di zero in A/I se e solo se $(I : a) = I$.

ii) Se e' A un dominio e Q il suo campo dei quozienti, allora

$$Q[x] \otimes_{A[x]} Q[x] \cong Q[x].$$

Esercizio 3. Siano

$$I = (x-y+z^2, y-z-1, z^3) \text{ e } J = (x^2-z-1, y^2+z-1, z(z-1))$$

ideali in $\mathbb{C}[x, y, z]$ provare che $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 + 2y^2 - 3, x^2 + xy + y^2 - 3) \subset \mathbb{C}[x, y]$.

a) Calcolare $I \cap \mathbb{C}[y]$.

b) Siano $\mathfrak{p}_1 = (x-1, y-1)$ e $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$, descrivere $I_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathbb{C}[x, y]$ e $I_{\mathfrak{p}_2} \cap \mathbb{C}[x, y]$.