Algebra II - Correzione
6 Giugno 2012

Esercizio 1 . Sia $A = k[x, y, z]$, $I = (x^2 + y^2 - z, xy - 1)$.

i) Dimostrare che A/I è un $k[z]$ modulo finitamente generato.

ii) Trovarne un insieme di generatori

iii) decomporre A/I come somma diretta di $k[z]$ moduli ciclici

Soluzione i)-ii) Calclando una base di Groebner lex di I Si ha $I = (x + y^3 - yz, y^4 - y^2z + 1)$, da cui $A \cong k[z][y]/(y^4 - y^2z + 1)$ e' generato come $k[z]$-modulo da $< 1, y, y^2, y^3 >$ (il polinomio $y^4 - y^2z + 1$ e' monico quindi si puo' fare la divisione su $k[z]$). iii) dato che $< 1, y, y^2, y^3 >$ sono indipendenti modulo I essi sono una base e quindi $A \cong k[z]^4$.

Esercizio 2. Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, giustificare o dare un controesempio se falsa.

a. Sia $A = \mathbb{C}[t]$. L'A-modulo $A[x]/(x^2 - t)$ e' proiettivo? e' piatto?

b. Se A e' un PID e M e' un A-modulo non finitamente generato privo di torsione allora M e' libero.

c. Se $A = \mathbb{Z}$, $S = \{3^n5^m \mid m, n \in \mathbb{N})$ e $T = \{15^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ allora $S^{-1}\mathbb{Z} = T^{-1}\mathbb{Z}$.

d. Siano M, N A-moduli finitamente generati. Se $M \otimes_A N = 0$ a allora $Ann(M) + Ann(N) = A$.

Soluzione [a.] Vero. $A[x]/(x^2 - t)$ e' un A-modulo libdero generato da $1, x$, quindi e' proiettivo e piatto.

[b.] Falso. Basta considerare $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. E' sicuramente privo di torsione, ma non essendo ciclico non e' libero.

[c.] Vero. Basta osservare che il saturato di T e' uguale a S.

[d.] Vero. Supponiamo che $M \neq 0$ e $N \neq 0$. Sappiamo che e' vero se A e' locale. Supponiamo allora che $J = Ann(M) + Ann(N) \subset A$, allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ tale che $J \subset \mathfrak{m}$. Localizzando in $\mathfrak{m}$ otteniamo che $0 = (M \otimes_A N)_\mathfrak{m} \cong M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m}$ e quindi o $M_\mathfrak{m} = 0$ o $N_\mathfrak{m} = 0$. Sia $M_\mathfrak{m} = 0$. Dato che M e' finitamente generato allora esiste $s \notin \mathfrak{m}$ tale che $sM = 0$ e questo e' assurdo dato che $Ann(M) \subset \mathfrak{m}$.

Esercizio 3: Sia $A = \mathbb{Q}[x]/(x^5 - 3x^2) \oplus \mathbb{Z}/(12)$.

i) Tovare gli elementi nilpotenti e divisori di zero in A.

ii) Trovare, se esistono, gli ideali primi $\mathfrak{p}$ in A tali che $A_\mathfrak{p}$ e' un campo.

Soluzione Si ha $(x^5 - 3x^2) = (x^2) \cap (x^3 - 3)$ quindi i primi associati a zero in $\mathbb{Q}[x]/(x^5 - 3x^2)$ sono (x) e $(x^3 - 3)$ (che sono anche minimali), quindi i primi associati a 0 di A sono] $\mathfrak{p}_1 = ((x) \oplus (1)), \mathfrak{p}_2 = ((x^3 - 3) \oplus$

$(1)),\mathfrak{P}_3 = ((1)\oplus(2)), \mathfrak{p}_4 = ((1)\oplus(3))$. Cosi', dato che A e' noetheriano, $\mathfrak{N}(A) = \cap_i \mathfrak{p}_i = ((x(x^3-3))\oplus(6)$.

Per quanto riguarda i divisori di zero ricordiamo che essi sono dati dall'unione dei primi associati a zero. Quindi $\mathfrak{D}(A) = ((x)\oplus(1)) \cup ((x^3-3)\oplus(1)) \cup ((1)\oplus(2)) \cup ((1)\oplus(3))$.

ii) Scriviamo $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \oplus \mathfrak{t}_i$ se $S_i = A \setminus \mathfrak{p}_i$ si ha ${S_i}^{-1}A \cong (\mathbb{Q}[x]/(x^2(x^3-3))_{\mathfrak{q}_i} \cong (\mathbb{Q}[x]/(x^2)_{\mathfrak{q}_i} \oplus (\mathbb{Q}[x]/(x^3-3)_{\mathfrak{q}_i}$ se $i=1,2$ e ${S_i}^{-1}A \cong (\mathbb{Z}/(12))_{\mathfrak{t}_i} \cong (\mathbb{Z}/(3))_{\mathfrak{t}_i} \oplus (\mathbb{Z}/(4))_{\mathfrak{t}_i}$ se $i=3,4$ quindi si ottiene che ${S_i}^{-1}A$ è un campo per $i=2,4$.

Esercizio 4: Sia $A = \mathbb{C}[x,y,z]$ e $I = (xy^3, xy+y^2, y^2-z^2)$.

i) Calcolare $I_1 = I \cap \mathbb{C}[y,z]$ e $I_2 = I \cap \mathbb{C}[z]$.

ii) Se $\pi_1 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ e' la proiezione data da $\pi_1(a_1,a_2,a_3) = (a_2,a_3)$ e' vero che $\pi_1(V(I)) = V(I_1)$?

Soluzione La base di groebner lex di I e' $(xy+z^2, xz^2+yz^2, y^2-z^2, z^4)$ da cui si ottiene che $I_1 = (y^2-z^2, z^4)$ e $I_2 = (z^4)$. Pur non valendo il teorema di estensione dato che $V(I) = \{(a,0,0), a \in \mathbb{C}\}$ e $V(I_1) = \{(0,0)\}$ si ha che $\pi_1(V(I)) = V(I_1)$.