Algebra II
11 Giugno 2013

Esercizio 1: i) Sia K un campo finito e sia $f(x) \in K[x]$ allora $K[x]/(f(x))$ e' un anello ridotto se e solo se $\gcd(f, f') = 1$,

ii) Se $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $\gcd(f, f') = 1$, provare che l'insieme dei primi $p \in \mathbb{Z}$ tali che $(\mathbb{Z}/p)[x]/(f(x))$ non è un anello ridotto è un insieme finito.

Esercizio 2. Siano $A = (\mathbb{Z}/(200))_{18}$, $B = (\mathbb{Z}/(200))_6$, $C = (\mathbb{Z}/25) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/40)$ e $D = \mathbb{Z}_{(3)}[x]/(6x-1)$. Decidere quali di questi anelli sono isomorfi (motivando le risposte) e trovarne la cardinalità.

Esercizio 3. Sia A un anello artiniano.

i) Provare che $A = A^* \cup \mathfrak{D}(A)$, Dove $\mathfrak{D}(A)$ sono i divisori di zero di A.

ii) Se A è locale e $S \subset A$ un insieme moltiplicativamente chiuso, provare che $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ è un omomorfismo surgettivo.

Esercizio 4. Siano $I = (x^2 - y^2 - zy, xy - y^2 z)$ e $J = (x^2 - y^2 - yz, xy - y^2 z, y^3 z^2 - y^3 - y^2 z)$ ideali in $\mathbb{C}[x, y, z]$. Provare che $I = J$.

E' vero che $I = \mathfrak{I}(V(I))$?