Algebra II
18 Luglio 2013

Esercizio 1: Sia G_1 il gruppo abeliano generato dagli elementi $\{a, b, c, d\}$ che soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} 2a + 2b + c + 3d = 0 \\ -2b + c + 3d = 0 \\ -4a + 4b - 3c - 15d = 0 \\ 6a + 4b + c + 9d = 0 \\ 12a + 4b + c + 21d = 0 \end{cases}$$

e $G_2 \cong coker(\varphi_\alpha)$ dove $\varphi_\alpha : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, è l'omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli dato da

$$\varphi_\alpha(x, y, z) = (2x + 8y - 4z, \alpha x + 6y + \alpha z, -2x - 2y + 4z).$$

Determinare se esistono valori di $\alpha \in \mathbb{Z}$, tali che G_1 e G_2 siano isomorfi (come $\mathbb{Z}$-moduli).

Esercizio 2: Sia A un anello noetheriano. Provare che ogni ideale $J \subseteq A$ che contiene un ideale radicale Q di dimensione zero è radicale oppure $J = (1)$.

Esercizio 3: i) Sia $M = \{\frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ e sia $p \in \mathbb{Z}$ primo. Provare che $M \otimes_{\mathbb{Z}} (M/\mathbb{Z}) = 0$. i ii) Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale

$$\mathbb{Q}[x]/(x) \otimes_{\mathbb{Q}[x]} \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1).$$

iii) Sia $\alpha = \sqrt[5]{3}$, provare che $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha] \cong \mathbb{C}^5$.

Esercizio 4: Sia $I = (xyz - 2, y^2z - x, 3x^2z^2 - y) \subset K[x, y, z]$.

i) Provare che se $K = \mathbb{C}$ allora $\sharp V(I)$ è finita e non vuota.

ii) Trovare $p \in \mathbb{Z}$, primi, tali che se $K = \mathbb{Z}/p$, $V(I) = \emptyset$ o $\sharp V(I)$ infinita.