Algebra II
10 Gennaio 2014
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1: Sia A un anello commutativo con identita', $I \subset A$ un ideale. Provare che se un elemento $g \in A$ è tale che $(I : g^m) = (I : g^{m+1})$ allora:

i) $\forall s \geq 1, (I : g^m) = (I : g^{m+s})$

ii) $I = (I : g^m) \cap (I, g^m)$.

Soluzione i) Per ipotesi l'uguaglianza e' vera per $s = 1$, sia dunque vera per $s \geq 1$ e proviamo per $s + 1$. Se $b \in (I : g^{m+s+1})$ allora $bg \in (I : g^{m+s}) = (I : g^m)$ quindi $bg^{m+1} \in I$ da cui $b \in (I : g^{m+1}) = (I : g^m)$.
ii) Basta provare che se $a \in (I : g^m) \cap (I, g^m)$ allora $a \in I$. Sia $a = i + kg^m$, da $ag^m = ig^m + kg^{2m}$ segue che $k \in (I : g^{2m})$ la tesi e' quindi provata dato che per i) $(I : g^{2m}) = (I : g^m)$.

Esercizio 2. Un A modulo M si dice irriducibile se $M \neq 0$ e se 0 e M sono i soli sottomoduli di M.

i) Provare che un A modulo M è irriducibile se e solo se $M \neq 0$ e $\forall\ 0 \neq m \in M$ si ha $< m >= M$.

ii) Determinare tutti gli $\mathbb{Z}$-moduli irriducibili.

iii) Sia $\psi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow M$ un omomorfismo surgettivo di $\mathbb{Z}-moduli$, tale che $Ker(\psi) =< m_1, m_2, m_3 >$, dove $m_1 = (2, 4, 6), m_2 = (0, a, 2a), m_3 = (b, 4, 6),\ a, b \in \mathbb{Z}$. Trovare se esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che lo $\mathbb{Z}$-modulo M è irriducibile.

Soluzione i) Sia M irriducibile e sia $m \in M$. Allora il sottomodulo ciclico $< m > \subset M$ è un sottomodulo di M e quindi per ipotesi $< m >= M$, ossia M è ciclico e ogni elemento non zero di M è un suo generatore. Viceversa supponiamo che M sia ciclico generato da un qualunque elemento diverso da zero sia $N \subset M$ un sottomodulo di M. Per ogni $0 \neq n \in N \subset M$, $< n >$ è un sottomodulo non zero di M Allora per ogni elemento $0 \neq n \in N$, $< n >= M$ e quindi $N = M$. Dato che ogni sottomodulo diverso da zero contiene almeno un sottomodulo $< n >$, M è irriducibile.
ii) Ogni $\mathbb{Z}$-modulo è un gruppo abeliano, dovendo essere ciclico e tale che ogni elemento non zero sia un generatore, devono essere gruppi ciclici di ordine primo.
iii) Se $\varphi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ è dato da $\varphi(e_i) = m_i$, $M \cong \mathbb{Z}^3/Ker(\psi) \cong coker(\varphi)$. La matrice che rappresenta φ (rispetto alle basi canoniche) è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 4 & a & 4 \\ 6 & 2a & 6 \end{pmatrix}.$$

Riducendo con operazioni elementari otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}.$$

quindi scegliendo ad esempio $a = 1$ e $b = 3$ si ha $M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che e' irriducibile.

Esercizio 3: Sia $p(x) = (x-1)^2(x^2+2) \in \mathbb{Q}[x]$ e $S = \{q(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid (q(x), p(x)) = 1\}$.

i) Provare che S è moltiplicativamente chiuso;

ii) Se $A = S^{-1}\mathbb{Q}[x]$, provare che $\#Spec(A) = 3$;

iii) Se $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in Spec(A)$ descrivere $A/\mathfrak{m}_1$ e $A/\mathfrak{m}_2$

iv) Calcolare $A/\mathfrak{m}_1 \otimes_A A/\mathfrak{m}_2$

Soluzione i) $1 \in S$ e dato che se $(q_1, p) = (q_2, p) = 1$ anche $(q_1q_2, p) = 1$, S e' moltiplicativamente chiuso. Notiamo anche che $0 \notin S$.
ii) $A = \{\frac{f}{g} \in \mathbb{Q}(x) \mid (g, p) = 1\}$, gli ideali primi di A sono in corrispondenza con gli ideali primi $\mathfrak{p}$ di $\mathbb{Q}[x]$ tali che $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Dato che i primi di $\mathbb{Q}[x]$ sono principali e generati da elementi irriducibili gli unici ideali possibili sono $(0), (x-1)A, (x^2+2)A$, gli ultimi due sono ideali massimali.
iii) Si ha $A/(0) = A$. $A/(x-1)A \cong \mathbb{Q}$, considerando l'omomorfismo $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ dato da $\varphi(\frac{f}{g}) = \frac{f(1)}{g(1)}$, che è ben definito, surgettivo con nucleo $(x-1)A$. Analogamente $A/(x^2+2)A \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{Q}(\alpha)$ considerando l'omomorfismo $\psi : A \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ dato da $\psi(\frac{f}{g}) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$.
iv) $A/\mathfrak{m}_1 \otimes_A A/\mathfrak{m}_2 \cong A/(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = 0$.

Esercizio 4: Sia $I = (x^2+y^2+z^2-2, y^2-z^2+1, xz-1) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

i) Provare che $W = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita.

ii) Trovare una base $\mathfrak{B}$ di W e le coordinate di $p = x^2 + y^2z + 2y + 1$ rispetto a $\mathfrak{B}$.

iii) E' vero che $dim_{\mathbb{Q}}W = \#V_{\mathbb{C}}(I)$? (Giustificare la risposta).

Soluzione i) La base di Gröbner ridotta di I (rispetto all'ordinamento lex con $x > y > z$) è $(x + 2z^3 - 3z, y^2 - z^2+1, z^4-\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{2})$ quindi $\mathfrak{B} = \{1, y, yz, yz^2, yz^3, z, z^2, z^3\}$ e $dim_{\mathbb{Q}}(W) = 8$.
ii) La forma normale di p rispetto alla base calcolata in i) è $2y + z^3 - 2z^2 - z + 4$ e $[p]_{\mathfrak{b}} = (4, 2, 0, 0, 0, -1, 2, 1)$.
iii) No. Infatti $z^4 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2} = (z^2 - 1)(z^2 - \frac{1}{2})$, ma non è vero che per ognuno dei 4 valori di z esistono 2 punti. Infatti $(I, z - 1) = (x - 1, y^2, z - 1)$ e $(I, z + 1) = (x + 1, y^2, z + 1)$. ($I$ non è radicale).