Algebra II
14 Febbraio 2014
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1: Esercizio 1: Sia $M_\alpha \cong coker(\varphi_\alpha)$ dove $\varphi_\alpha : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, è l'omomorfismo di $\mathbb{Z}$ moduli dato da $\varphi_\alpha(x, y, z) = (9\alpha x - 8\alpha y - \alpha z, 4\alpha x - 3\alpha y - \alpha z, -6\alpha x + 7\alpha y - \alpha z)$.

i) Esprimere M_α come somma diretta di $\mathbb{Z}$- moduli ciclici, al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}$.

ii) Trovare se esistono i $p \in \mathbb{Z}$ primi e gli $\alpha \in \mathbb{Z}$ tali che $M_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ sia ciclico.

iii) Descrivere, al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}$ lo $\mathbb{Z}$-modulo $(M_\alpha)_{(5)}$.

Giustificare le risposte.

Soluzione. i) La matrice che rapresenta φ_α (rispetto alle basi canoniche) è:

$$\begin{pmatrix} 9\alpha & -8\alpha & -\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha & -\alpha \\ -6\alpha & 7\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

riducendo con operazioni elementari si ottiene la matrice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

a) se $\alpha = 0$, $M_0 \cong \mathbb{Z}^3$,

b) se $\alpha \neq 0$, $M_\alpha \cong \mathbb{Z}/(\alpha\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(5\alpha\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$

ii) Dall'analisi del punto precedente, otteniamo che:

a) se $\alpha = 0$, $M_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}))^3$.

b) se $\alpha \neq 0$, $M_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/((\alpha, p)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/((5\alpha, p)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$. Quindi se $(\alpha, p) = (5\alpha, p) = 1$ ossia se $p \neq 5$ e $(\alpha, p) = 1$, allora $M_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ è ciclico.
Se $p = 5$ e $(\alpha, 5) = 1$ otteniamo $M_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(5\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/(5\mathbb{Z}))^2$.
Se $(\alpha, p) = p$, $M_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}))^3$ e quindi in entrambi i casi non è ciclico.

iii) Ancora considerando l'analisi del punto i) otteniamo che:

a) se $\alpha = 0$, $(M_0)_{(5)} \cong (\mathbb{Z}_5)^3$.

b) se $\alpha = 5^k\beta$ con $k \geq 0$ e $\gcd(\beta, 5) = 1$ allora

Dato che se $(\beta, 5) = 1$, $\beta \in S = \mathbb{Z} \setminus (p)$ e quindi $(\mathbb{Z}/(\beta\mathbb{Z}))_{(5)} = 0$ e $(\mathbb{Z}/(5^k\mathbb{Z}))_{(5)} \cong \mathbb{Z}/(5^k\mathbb{Z})$ si ha

$$(M_\alpha)_{(5)} \cong \mathbb{Z}/(p^k\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(p^{k+1}\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_{(p)}$$

.

Esercizio 2. Siano $I, J, K \subset A$ ideali di un anello commutativo A. Provare le seguenti affermazioni o dare un controesempio:

i) $\sqrt{(I, JK)} = \sqrt{(I, J)} \cap \sqrt{(I, K)}$.
ii) $\sqrt{I + \sqrt{J}} = \sqrt{I + J}$
iii) $\sqrt{I} + \sqrt{J} = \sqrt{I + J}$.

Soluzione. i) Dato che $(I, JK) \subset (I, J) \cap (I, K)$ è sufficiente dimostrare che $\sqrt{(I, JK)} \supset \sqrt{(I, J)} \cap \sqrt{(I, K)}$. Sia $a \in \sqrt{(I, J)} \cap \sqrt{(I, K)}$, allora esistono $m, n\mathbb{N}$ tali che $a^n = b + j \in (I, J)$ e $a^m = c + k \in (I, K)$, con $b, c \in I, j \in J, k \in K$. Considerando $a^{n+m} = (bc + bk + cj) + jk \in (I, JK)$ si ha la tesi.
ii) Dato che $I + \sqrt{J} \supset I + J$ basta provare che $\sqrt{I + \sqrt{J}} \subset \sqrt{I + J}$, Sia $a \in \sqrt{I + \sqrt{J}}$, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $a^m = b + j \in I + \sqrt{J}$, con $b \in I, j \in \sqrt{J}$. Se m è tale che $b^m \in J$ considerando $a^{nm} = (b+j)^{nm} = c+j^m$ si ha la tesi.
iii) l'affermazione è falsa. Per esempio consideriamo in $\mathbb{Q}[x, y]$ gli ideali $I = (x^2+y)$ e $J = (x^2-y)$. Si ha $\sqrt{I} = I$ e $\sqrt{J} = J$ così $\sqrt{I}+\sqrt{J} = (x^2, y)$ mentre $\sqrt{I + J} = (x, y)$.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo, $I \subset A$ un ideale nilpotente e sia $\varphi : M \longrightarrow N$ un omomorfismo di A-moduli. Provare che se $\overline{\varphi} : M/IM \longrightarrow N/IN$ è surgettivo allora anche φ è surgettivo.

Soluzione Per ipotesi abbiamo che $N = \varphi(M) + IN$, ma allora vale anche $N = \varphi(M) + I(\varphi(M) + IN) = \varphi(M) + I^2n$, dato che $I\varphi() \subset \varphi(M)$. Iterando fino ad n tale che $I^n = 0$ si ottiene $N = \varphi(M) + I^nN = \varphi(M)$ e quindi φ è surgettivo.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 2, y^2 - z^2 + 1, xz - 1) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

a. Provare che $\mathbf{V}(I)$ e' finito.
b. Decomporre $\sqrt{I}$ come intersezione di ideali massimali (in $\mathbb{Q}[x, y, z]$).

Soluzione a) La base di Groebner ridotta di I (rispetto all'ordinamento lex con $x > y > z$) $(x + 2z^3 - 3z, y^2 - z^2 + 1, z^4 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2})$ contiene tre polinomi monici in x, y, e z, quindi $V(I)$ e' finita .
b) Dato che $2z^4 - 3z^2 + 1 = 2(z^2 - 1)(z^2 - \frac{1}{2})$ e (vedi es.2-i)

otteniamo che

$$\sqrt{I} = \sqrt{x-1, y, z-1} \cap \sqrt{x+1, y, z+1} \cap \sqrt{x-2z, y^2+\frac{1}{2}, z^2-\frac{1}{2}}$$

Questi ideali sono ideali massimali in $\mathbb{Q}[x,y,z]$. (Per vedere che il terzo ideale e' massimale basta osservare che i generatori di grado positivo sono univariati e irriducibili).