Algebra II – 19 Settembre 2013
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia M lo $\mathbb{Z}$-modulo generato dagli elementi m_1, m_2, m_3 che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 2m_1 - 4m_2 - 2m_3 &= 0 \\ 10m_1 - 6m_2 + 4m_3 &= 0 \\ 6m_1 - 12m_2 + am_3 &= 0 \end{cases}, a \in \mathbb{Z}$$

Rappresentare M come somma diretta di moduli ciclici al variare di $a \in \mathbb{Z}$. Se esistono, trovare per quali valori di a, $Ann(M) = 0$.

Soluzione. Consideriamo $\varphi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow M$ data da $\varphi(e_i) = m_i$, allora $M \cong \mathbb{Z}/Ker(\varphi)$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 10 & -6 & 4 \\ 6 & -12 & a \end{pmatrix}$$

la matrice delle relazioni fra i generatori di M , riducendo A con alcune operazioni elementari di riga e di colonna si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6+a \end{pmatrix}$$

da cui segue che la forma di Smith di A è data da:

1. se $a \equiv 8 \pmod{14}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6+a \end{pmatrix}$$

e quindi $M \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(14) \oplus \mathbb{Z}/(a+6)$

2. Se $a \equiv 0 \pmod 2$ e $a \not\equiv 1 \pmod 7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7(6+a) \end{pmatrix}$$

e quindi $M \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/7(a+6)$

3. Se $a \equiv 1 \pmod 2$ e $a \equiv 1 \pmod 7$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 2(6+a) \end{pmatrix}$$

e quindi $M \cong \mathbb{Z}/(14) \oplus \mathbb{Z}/2(a+6)$

4. Se $a \equiv 1 \pmod 2$ e $a \not\equiv 1 \pmod 7$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14(6+a) \end{pmatrix}$$

e quindi $M \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/14(a+6)$.

L'unico caso in cui $Ann(M) = 0$ si ha per $a = -6$.

Esercizio 2. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello commutativo locale e sia $M \neq 0$ un A-modulo finitamente generato. Provare che $Hom_A(M, A/\mathfrak{m}) \neq 0$.

Soluzione A è locale quindi il lemma di Nakayama implica che $\mathfrak{m}M \neq M$ dato che M è finitamente generato e non zero. Da questo segue che $M/\mathfrak{m}M$ è un $A/\mathfrak{m}$-modulo (e quindi uno spazio vettoriale) non zero ed esiste una applicazione lineare $f : M/\mathfrak{m} \longrightarrow A/\mathfrak{m}$. Se $\pi : M \longrightarrow A/\mathfrak{m}M$ denota la proiezione naturale allora $f \circ \pi$ è un elemento diverso da zero in $Hom_A(M, A/\mathfrak{m})$.

Esercizio 3.

Sia A un anello e $0 \neq a \in A$. Provare che sono fatti equivalenti:

i) $(a) = (a^2)$,

ii) (a) è addendo diretto di A ,

iii) $A/(a)$ è un A modulo piatto.

soluzione $i) \Longrightarrow ii)$. Proviamo che la successione

$$0 \longrightarrow (a) \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A/(a) \longrightarrow 0$$

spezza. Per questo proviamo che esiste $r : A \longrightarrow (a)$ tale che $r \circ j = id_{(a)}$. Dato che $a \in (a^2)$ esiste $c \in A$ tale che $a = ca^2$, definiamo $r(b) = cab$. Si ha $rj(a) = ca^2 = a$ da cui $r \circ j = id_(a)$.
$ii) \Longrightarrow i)$. Se $A \cong (a) \oplus A/(a)$ considerando di nuovo la successione esatta, che per ipotesi spezza, si ha che esiste $r : A \longrightarrow (a)$ tale che $r \circ j = id_(a)$. r è determinato da $r(1) = ka$. Dato che $r \circ j = id_{(a)}$, si ha $a = rj(a) = ka^2 \in (a^2)$.
$ii) \Longleftrightarrow iii)$. Dato che A è piatto , anche i suoi addendi diretti lo sono.
$iii) \Longleftrightarrow i)$. Dato che $A/(a)$ è piatto l'omomorfismo $(a) \otimes A/a) \cong (a)/(a^2) \longrightarrow A \otimes A/(a) \cong A/(a)$ è iniettivo, da cui la tesi.

Esercizio 4. Trovare i primi associati minimali dell'ideale $I = (x^2zt, yt^3, xyzt, x^5z^6) \subset K[x, y, z, t]$.
Soluzione E' sufficiente trovare una decomposizione del radicale di I. Si ha che $\sqrt{I} = (xzt, yt, xyzt, xz) = (yt, xz) = (x, y) \cap (y, z) \cap (x, t) \cap (z, t)$ che sono i primi minimali.