Algebra II
9 Giugno 2014

Esercizio 1. Decidere se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Siano $I = (x^2 + 1, y^2 - 1)$ e $J = (x^2 + xy, y^2 + xy + 1)$ ideali in $\mathbb{Q}[x, y]$ allora $\mathbb{Q}[x, y]/I \cong \mathbb{Q}[x, y]/J$.

ii) Sia $I \subset k[x, y]$ un ideale tale che $I \cap k[x] = 0$.
I è primo se e solo se $I^e \subset k(x)[y]$ è primo e $I^{ec} = I$.

iii) Siano $f, g \in k[x, y]$ allora $\sqrt{(f, g)} = \sqrt{(f^2, g^3)}$

Esercizio 2. Sia $S = \{2^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ e sia $A = S^{-1}\mathbb{Z}$.
Se $0 \neq p \in \mathbb{Z}$ un primo allora $A_{(p)A} \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ se e solo se $p \neq 2$.

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{Z}$ e sia $N_a \subset \mathbb{Z}^3$ il sottomolulo di $\mathbb{Z}^3$ generato da $m_1 = (2, 2, a), m_2 = (2, a, 0), m_3 = (0, 4, 2)$. Trovare le classi di isomorfismo di $M_a = \mathbb{Z}^3/N_a$, al variare di $a \in \mathbb{Z}$. Trovare, se esistono, i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(7), M_a) \neq 0$.

Esercizio 4. Consideriamo l'anello $A = \mathbb{Z}[x, y]$ e l'ideale $I = (9x^2 - y, 7y^2 + 2x + y, 63) \subset A$.

i) Provare che ogni primo di A/I massimale

ii) Provare che A/I uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato

iii) Trovare una decomposizione primaria di I.

iv) Se B è un dominio a ideali principali ed esiste $\varphi : B \longrightarrow A/I$ iniettivo allora B un campo.