## Algebra II - 25 Giugno 2014

**Esercizio 1.** Decidere se le seguenti affermazioni sono vere o false. Provare se vere, dare un controesempio se false.

i) Se $I, J \subset R$ si ha $I \subset J$ se e solo se $I_P \subset J_P$ in $R_P$ per ogni massimale $P \subset R$.

ii) Se $I, J \subset A$ sono ideali di un anello noetheriano $A$, $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$.

iii) Sia $A$ noetheriano. Ogni endomorfismo di $A$ surgettivo è un isomorfismo.

**Esercizio 2.**Sia $A$ un anello commutativo con identità e si $\mathfrak{p} \subset A$ un primo minimale.

i) Provare che ogni elemento in $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è nilpotente.

ii) Provare che ogni elemento in $\mathfrak{p}$ è un divisore di zero in $A$.

iii) Se $A$ è ridotto, provare che ogni divisore di zero è contenuto in un primo minimale.

**Esercizio 3.** Provare che un dominio $A$ è un campo se e solo se ogni $A$-modulo è proiettivo.

**Esercizio 4.** Sia $I = (z^2 - x, x^4 - y^2 + yz^4 - yx^2)$ ideale di $A = \mathbb{Q}[x, y, z]$ e sia $S = \{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

i) Trovare i primi minimali associati ad $I$.

ii) Provare che $S^{-1}I \subset S^{-1}A$ è un ideale proprio.

iii) Trovare due ideali $J, J' \subset S^{-1}A/I$ tali che

$$S^{-1}A/I = J \oplus J'$$