Algebra II - 16 Dicembre 2014

Esercizio 1. Sia M lo $\mathbb{Z}$-modulo generato da elementi v_1, v_2, v_3, v_4 che soddisfano le relazioni:

$$3v_1 = 0,\ av_1 + 3v_2 = 0,\ bv_2 + 3v_3 = 0$$

con $a, b, \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, b) = 1$. Descrivere $T(M)$, il sottodulo di torsione di M, al variare di $a, b, \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Sia A è un anello e $I \subset A$ un ideale. Se $\mathfrak{N}(A/I) = 0$ allora I è primo, ($\mathfrak{N}(A/I)$ è il nilradicale di A/I).
2. $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1) \otimes_{\mathbb{Q}[x]} \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1) = 0$.
3. Se $A[x_1, ., x_n]$ è noetheriano allora A è un anello noetheriano.
4. Sia $I \subset K[x_1, .., x_n]$ un ideale e sia $<$ un ordinamento monomiale. Se $Lt_<(I)$ è primo allora I è primo.

Esercizio 3. Consideriamo l'ideale

$$I = (3x^2 + 10y - 2, (x + y)^3, 45) \subset \mathbb{Z}[x, y]$$

e sia $A = \mathbb{Z}[x, y]/I$.

1. Trovare i divisori di zero in A
2. Trovare, se esiste, un ideale primo $\mathfrak{p} \subset A$ per cui $A_\mathfrak{p}$ non e' un dominio.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 - yzt, t - yt, zt - y)$ ideale in $\mathbb{C}[x, y, z, t]$

i) Calcolare la base di Gröbner ridotta di I rispetto all'ordinamento lex con $x > y > z > t$.

ii) trovare le componenti irriducibili di $V(I)$.

iii) Se $f = xt + y$ e' vero che $f \in I$?